Prof. Dr. Alexander Lytchak

SS 2019
Blatt 9
29.05.2019

Topologie und Einführung in die Kohomologie

Dieses Übungsblatt muss nicht abgegeben werden. Durch das Vorrechnen von Aufgaben in der Übungsstunde können Bonuspunkte für die Klausur erlangt werden.

Besprechung: In der Übung am 04.06.

1. Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$, $X \in T_pM$ und $f \in C^\infty(M)$. Überlegen Sie sich, wie die folgende Gleichungen zu verstehen ist und beweisen Sie sie anschließend.
$$X(f) = (D_p(f))(X)$$

2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, X, Y glatte Vektorfelder auf M und $p \in M$.

   a) Zeigen Sie, dass $[X, Y]_p$ nicht nur von X_p und Y_p abhängt.

   b) Zeigen Sie, dass für eine Umgebung U von p der Vektor $[X, Y]_p$ nur von den Werten von X und Y auf U abhängt.

3. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n) | \det(A) = 1\}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ist und für $I \in \mathrm{GL}(n)$ die Einheitsmatrix gilt, dass
$$T_I\mathrm{SL}(n) = \{B \in M(n) \mid \mathrm{Spur}(B) = 0\}.$$

4. Sei M eine kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Das Normalenbündel νM von M ist definiert als Teilmenge von $M \times \mathbb{R}^n$ die aus Paaren (m, v) besteht, für die v senkrecht auf $T_mM \subset \mathbb{R}^n$ steht. Beweisen Sie:

   a) νM ist eine Untermannigfaltigkeit von $M \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ der Dimension n.

   b) Für jeden Punkt $m \in M$ ist der Tangentialraum an $(m, 0) \in \nu M$ gegeben durch $T_{(m,0)}\nu M = T_mM \oplus T_mM^\perp \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

   c) Die Abbildung $E : \nu M \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $E(m, v) := m + v$ ist glatt und hat in jedem Punkt $(m, 0)$ ein bijektives Differential.

   d) Es gibt eine Umgebung U von $M = M \times \{0\}$ in νM, so dass $E : U \to E(U)$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von M in $\mathbb{R}^n$ ist.