1. Existenz von Funktionen

Sei X ein normaler topologischer Raum. Ist $A \subset U$ mit U offen und A abgeschlossen, so gibt es ein offenes O mit $A \subset O \subset \bar{O} \subset U$, d.h., man kann zwischen A und U noch ein solches Paar hineinschieben. Dies folgt aus der Definition der Normalitatät, angewendet auf abgeschlossene Mengen A und $X \setminus U$.

Nun können wir das "Lemma von Urysohn" zeigen:

SATZ 1.1. *Sind in einem normalen Raum X ein Paar disjunkter abgeschlossener Mengen A, B gegeben, so gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(A) = 0$ und $f(B) = 1$.*

Beweis. Setze $U_1 = X \setminus B$ und finde offenes U_0 mit $A \subset U_0 \subset \bar{U}_0 \subset U_1$. Nun schieben wir eine offene Menge $U_{\frac{1}{2}}$ zwischen $\bar{U}_0$ und U_1. Dann eine offene Menge $U_{\frac{1}{4}}$ zwischen $\bar{U}_0$ und $U_{\frac{1}{2}}$, sowie eine offene Menge $U_{\frac{3}{4}}$ zwischen $\bar{U}_{\frac{1}{2}}$ und U_1.

Induktiv (nach n), finden wir für jede dyadische Zahl $d = \frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq 2^n$ offene Mengen U_d, so dass für $r < s$ die Inklusion $\bar{U}_r \subset U_s$ gilt. Bezeichne mit $\mathcal{D}$ die Menge aller dyadischen Zahlen in $[0,1]$.

Wir definieren nun $f : X \to \mathbb{R}$ wie folgt. Für $x \notin U_1$ setzen wir $f(x) := 1$. Für $x \in U_1$ setzen wir

$$f(x) := \inf\{d \in \mathcal{D} | x \in U_d\}\,.$$

Es gilt $f(X) \subset [0,1]$, $f(A) = 0$ und $f(B) = 1$.

Nach Konstruktion gilt $f(x) \leq d$ für $x \in \bar{U}_d$ und $f(x) \geq d$ für $x \notin U_d$.

Um die Stetigkeit von f zu zeigen, müssen wir beweisen, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Urbilder der offenen Strahlen $(-\infty, t)$ und (t, ∞) offen in X sind. Aus der obigen Bemerkung folgt

$$f^{-1}(-\infty, t) = \bigcup_{d<t} U_d = \bigcup_{d<t} \bar{U}_d$$

$$f^{-1}(t, \infty) = \bigcup_{d>t} (X \setminus U_d) = \bigcup_{d>t} (X \setminus \bar{U}_d)$$

Diese Menge ist offen, da alle U_d offen und $\bar{U}_d$ abgeschlossen sind. □

2. Satz

Jetzt können wir den Metrisierungssatz von Urysohn beweisen. Wir bezeichnen mit $\mathcal{H}$ den *Hilbertraum der quadrat-integrierbaren Folgen* $(a_n) \in \mathbb{R}$, d.h., aller Folgen reeller Zahlen mit $\sum a_n^2 < \infty$. Diese ist ein Vektorraum mit Norm

$$||(a_n)|| := \sqrt{\sum a_n^2}\,.$$

Selbst für metrische Räume enthält der Metrisierungssatz eine neue Aussage: jeder metrischer Raum mit einer separablen dichten Teilmenge ist homömorph zu einer Teilmenge des Hilbertraums $\mathcal{H}$.

SATZ 2.1. *Ist X ein normaler Raum mit einer abzählbaren Basis $\mathcal{B}$, so ist X homöomorph zu einer Teilmenge des Hilbertraums $\mathcal{H}$.*

Beweis. Die Menge $\mathcal{M}$ der Paare $U, V \in \mathcal{B}$ mit $\bar{U} \subset V$ ist abzählbar als $P_1, ..., P_n, ...$ Für jedes solche Paar $P = (U, V) \in \mathcal{M}$ betrachte eine stetige Funktion $f_P : X \to [0, 1]$, mit $f_P(\bar{U}) = 0$ und $F_P(X \setminus V) = 1$.

Setze $g_n(x) := \frac{1}{n} \cdot f_{P_n}(x)$ und betrachte die Abbildung $F : X \to \mathcal{H}$ gegeben durch $F(x) = (g_n(x))$.

Für jedes $x \in X$ ist $(g_n(x))$ quadrat-integrierbar, also ist die Abbildung F wohldefiniert. Aus der Stetigkeit der Funktionen f_{P_n} folgt leicht die Stetigkeit von F.

Sei $x \in X$ und $A \subset X$ abgeschlossen, mit $x \notin A$. Dann gibt es ein $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V \subset \bar{V} \subset X \setminus A$. Dann finden wir wegen Noramlität ein $U \in \mathcal{B}$ mit $\{x\} \subset U \subset \bar{U} \subset V$. Für dieses Paar $P_m = (U, V)$ gilt $g_m(x) = 0$ und $g_m(A) = 1$.

Wenden wir diese Beobachtung auf den Fall $A = \{y\}$ an, so sehen wir, dass die Abbildung F injektiv ist.

Ferner gilt für jedes Paar x, A wie oben, dass $F(x)$ nicht im Abschluss von $F(A)$ liegt. Also ist für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ das Bild $F(A)$ abgeschlossen in $F(X)$.

Folglich ist die Abbildung $F : X \to F(X) \subset \mathcal{H}$ stetig, injektiv und abgeschlossen, also ein Homöomorphismus. □

3. Lokal kompakte Räume

Definition 3.1. *Ein Raum X heißt lokal kompakt, wenn jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt.*

Jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge in einem lokal kompakten Hausdorff Raum ist lokal kompakt.

Aus dem Lemma von Uryson folgern wir leicht:

Lemma 3.2. *Sei X ein lokal kompakter Hausdorff Raum, seien A, B disjunkte abgeschlossene Mengen in X und sei A kompakt. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f(A) = 0$ und $f(B) = 1$.*

Beweis. Überdecke A durch endlich viele offene Mengen V_i, s.d. $\bar{V}_i$ kompakt und disjunkt von B ist. Sei $C = \cup_i \bar{V}_i$.

Dann ist C kompakt, und A ist disjunkt von der kompakten Teilmenge $\partial C \subset C$.

Wir wenden das Lemma von Uryson auf das Paar $(A, \partial C) \subset C$ an und finden eine stetige Funktion $f : C \to [0,1]$ mit $f(A) = 0$ und $f(\partial C) = 1$. Setzt man f konstant 1 auf $X \setminus C$, so erhalten wir die gewünschte stetige Funktion. $\square$

Der Beweis des Metrisierungssatzes von Uryson zeigt nun:

Theorem 3.3. *Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum mit einer abzählbaren Basis, so ist X metrisierbar.*

Da solche Räume eine zentrale Rolle in der Topologie und im Rest der Vorlesung spielen werden, untersuchen wir etwas genauer ihre Struktur. Wir zeigen zunächst, dass solche Räume eine Ausschöpfung durch kompakte Mengen besitzen:

Theorem 3.4. *Sei X ein lokal kompakter Hausdorff Raum mit einer abzählbaren Basis. Dann gibt es offene Teilmengen $O_i, i \in \mathbb{N}$, so dass $\bar{O}_i$ kompakt und in O_{i+1} enthalten ist und $\cup O_i = X$ gilt.*

Beweis. Wähle eine abzählbare Basis aus offenen Mengen V_i, so dass $\bar{V}_i$ kompakt ist. Sei $U_1 = V_1$. Sei induktiv U_k mit $V_k \subset U_k$ und $\bar{U}_k$ kompakt definiert. Finde endlich viele V_j, die U_k übedecken und wähle U_{k+1} als die Verienigung dieser endlich vielen V_j und der Menge V_{k+1}. $\square$

Theorem 3.5. *Sei X ein lokal komakpter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Sei $U_\alpha, \alpha \in I$ eine Überdeckung von X durch offene Mengen. Dann gibt es eine Überdeckung von X durch offene Mengen $V_1, ..., V_n, ...$ mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *Für jedes i ist $\bar{V}_i$ kompakt und in einem U_α enthalten.*
(2) *Jede kompakte Teilmenge K von X schneidet nur endlich viele der Mengen V_i.*

Beweis. Wähle die Ausschöpfung O_i von X wie im letzten Theorem.

Für jedes U_α und jedes i betrachte $U_{\alpha,i} := U_\alpha \cap O_i \setminus \bar{O}_{i-2}$. Dann überdecken U_{α_i} die Menge U_α. Ersetzen wir jedes U_α durch die abzählbar vielen U_{α_i}. Überdecke und ersetze jede der Mengen $U_{\alpha,i}$ durch ihre offenen Teilmengen W_β, so dass $\bar{W} \subset U_{\alpha_i}$.

Nun gehen wir wie folgt vor. Wir setzen $C_i = \bar{K}_i \setminus K_{i-1}$. Bei Konstruktion, schneidet jedes $U_{\alpha,i}$ und damit jedes w_β höhstens zwei der Mengen C_i. Für jedes i finden wir endlich viele W_j^i aus unseren W_β, die C_i überdecken und so dass jede dieser Mengen C_i schneidet. Alle diese Mengen W_j^i bilden die gesuchte Überdeckung V_i.

Die erste Eigenschaft ist klar nach Konstruktion.

Um die zweite einzusehen, benutzen wir, dass jede kompakte Menge K in einer der Mengen K_i enthalten ist. Wenn V_j die Menge K_i schneidet, so schneidet es eine der Mengen $C_1, ..., C_i$. Nach Konstruktion sind es nur endlich viele. $\square$

Nun können wir die sogenannte Parakompaktheit solcher Räume zeigen.

Definition 3.6. *Der Träger einer Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist der Abschluß der Menge der Punkte in denen f nicht verschwindet.*

Theorem 3.7. *Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Sei U_α eine offene überdeckung von X. Dann gibt es stetige Funktionen $f_1, ..., f_n, ... : X \to [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *Für jede kompakte Teilmenge K gibt es ein $n_0 = n_0(K)$, so dass alle f_n mit $n \geq n_0$ auf K konstant 0 sind.*
(2) *Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1$ für alle x.*
(3) *Für jedes n ist der Träger von f_n in einer Mengen U_α enthalten.*

Beweis. Wähle eine lokal endliche überdeckung V_i wie im letzten Theorem. Wähle eine offene Überdeckung W_k, so dass für jedes k ein j mit $\bar{W}_k \subset V_j$ existiert und so dass jede kompakte Menge nur endlich viele $\bar{W}_k$ schneidet.

Für jedes k wähle ein j mit $\bar{W}_k \subset V_j$ und mit Lemma on Uryson eine stetige Funktion $g_k : X \to \mathbb{R}$, mit $g_k(W_k) = 1$ und $f_k(X \setminus V_j) = 0$.

Dann erfüllen g_k die Eigenschaften (1) und (3). Ferner ist $g = g_1 + g_2 + ... + g_n + ...$ in jedem Punkt größer 1.

Setze $f_k = g_k/g$. Die Eigenschaften (1) und (3) gelten nach wie vor und $\sum f_k = \sum g_k/g = 1$. $\square$