

ANALYSIS III

Dank

Für das Korrekturlesen dieser Notizen gilt mein großer Dank Sophia Wagner. Für zahlreiche und hilfreiche Kommentare und Verbesserungen möchte ich mich bei Manuel Becklas, Paul Creutz, Clemens Ferber, Akin Tas, Michael Treit und Shayan Zahedi bedanken.

Maßtheorie

1. ALLGEMEINES

1.1. **Ziele der Vorlesung.** Das Hauptziel der Vorlesung ist die Theorie und Bestimmung von Volumina und Oberflächen und eine Verallgemeinerung des Riemannsches Integrals auf höhere Dimensionen.

1.2. **Erstes Ziel.** Der Begriff der Länge in einer Dimension ist naiv sehr gut zugänglich. Für gewisse Teilmengen der Ebene bestimmt man mit Hilfe des Riemannsches Integrals Flächen, ohne sich genau darum zu kümmern, für welche Teilmengen man sie bestimmen kann, und welche Eigenschaften die Flächen haben.

Später in der Vorlesung werden wir auch Oberflächen von nicht voll-dimensionalen Teilmengen des Euklidischen Raumes verstehen und bestimmen lernen, z.B. Längen von Kurven und Oberflächen von Flächen. Unser primäres Ziel ist die Bestimmung der *Volumina* "voll-dimensionaler" Teilmengen des Euklidischen n -dimensionalen Raums \mathbb{R}^n . In der Vorstellung arbeiten wir immer mit den anschaulichen Fällen $n = 1, 2, 3$.

1.3. **Naiver Ansatz (Jordan-Maß).** Der naive Ansatz ist derjenige, der implizit bei der Bestimmung der Fläche unter einem Graphen mit Hilfe des Riemannsches Integrals benutzt wurde. Wir beschreiben es im Folgenden.

Für eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ versuchen wir A von "innen" und "außen" durch Vereinigungen von Quadern zu "approximieren".

Als *Quader* in \mathbb{R}^n bezeichnen wir ein Produkt von beschränkten Intervallen $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ (jedes Intervall $I_j \subset \mathbb{R}$ kann offen, abgeschlossen oder halboffen sein. Einige Intervalle dürfen einpunktig oder leer sein).

Als Volumen eines Quaders $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ definieren wir

$$\text{vol}(Q) := \ell(I_1) \cdot \dots \cdot \ell(I_n)$$

das Produkt der Längen $\ell(I_j)$ der Intervalle I_j , also der Abstände der beiden Randpunkte von I_j .

Gegeben sei eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$. Definiere

$$\text{vol}^+(A) := \inf \left\{ \sum \text{vol}(Q_j) \right\},$$

wobei das Infimum über alle endlichen Familien Q_j von Quadern gebildet wird, für die $A \subset \cup Q_i$ gilt.

Analog definiere

$$\text{vol}^-(A) := \sup \left\{ \sum \text{vol}(Q_j) \right\},$$

wobei das Supremum über alle endlichen Familien Q_j von Quadern gebildet wird, die alle in A enthalten sind und keine gemeinsamen inneren Punkte haben.

Man kann erwarten, dass $\text{vol}^+(A) \geq \text{vol}^-(A)$ gilt. Dies ist nicht offensichtlich, aber es ist richtig und wir werden es später nachweisen.

Naiverweise würden wir für alle, zumindest für alle "relevanten" Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ erwarten, dass $\text{vol}^+(A) = \text{vol}^-(A)$ gilt, und diese Größe würde man das Volumen von A nennen.

Bei der Definition (und der Motivation) des Riemannsches Integrals für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ wurde der Untergraph

$$U^f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

betrachtet und Folgendes gezeigt. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es endlich viele Rechtecke $Q_i^{\epsilon,+}, Q_i^{\epsilon,-}$ für $i = 1, \dots, m$, so dass

$$Q_i^{\epsilon,-} \subset Q_i^{\epsilon,+} \text{ und } \cup_{i=1}^m Q_i^{\epsilon,-} \subset U^f \subset \cup_{i=1}^m Q_i^{\epsilon,+}$$

gilt und die Rechtecke $Q_i^{\epsilon,+}$ sich höchstens an den Seiten schneiden. Die Summen

$$\sum_{i=1}^m \text{vol}(Q_i^{\pm, \epsilon})$$

sind genau die *Riemannsches Unter-* bzw. *Obersummen* und konvergieren für $\epsilon \rightarrow 0$ beide gegen $\int_a^b f$ (Aufgabe: wiederholen Sie die Konstruktion des Integrals und die zitierten Aussagen).

Also gilt in diesem Fall

$$\text{vol}^+(U^f) = \text{vol}^-(U^f) = \int_a^b f .$$

Wir werden später sehen, dass die Gleichheit

$$\text{vol}^+(A) = \text{vol}^-(A)$$

genau dann gilt, wenn der topologische Rand ∂A nicht zu groß ist, genauer, wenn $\text{vol}^+(\partial A) = 0$ erfüllt ist.

1.4. Erste Probleme. Dass die Eigenschaft $\text{vol}^+(\partial A) = 0$ und damit $\text{vol}^+(A) = \text{vol}^-(A)$ nicht immer gelten muss, sehen wir am einfachsten im Fall $n = 1$ am Beispiel der Menge $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$.

Aufgabe: Zeige, dass $\text{vol}^+(A) = \text{vol}^+(\partial A) = 1$ und $\text{vol}^-(A) = 0$ gilt.

Die Gleichheit $\text{vol}^+(A) = \text{vol}^-(A)$ muss aber auch weder für offene noch für abgeschlossene Mengen gelten. Ein wichtiges Gegenbeispiel ist die sogenannte "fette Cantor-Menge", die wir später kennenlernen.

Ein weiteres Problem ist, dass dieser naive Begriff des Volumens mit "Grenzwerten" nicht verträglich ist. So muss für eine aufsteigende Folge endlicher Mengen $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m \subset \dots$ die Gleichheit

$$\text{vol}^+(\cup A_i) = \lim \text{vol}^+(A_i)$$

nicht unbedingt gelten.

Aufgabe: Wieso folgt es aus der Aussage $\text{vol}^+(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$?

1.5. Axiomatischer Zugang. Neue Probleme. Da es Schwierigkeiten mit dem naiven Zugang gibt, versuchen wir eine axiomatische Herangehensweise. Wir überlegen uns, welche Eigenschaften das Volumen haben sollte und versuchen es erst danach zu definieren.

Das Volumen vol soll möglichst vielen (am besten allen) Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Zahl

$$\text{vol}_n(A) = \text{vol}(A) \in [0, \infty]$$

zuordnen. Dabei erwarten wir folgende minimale Eigenschaften:

- 1) $\text{vol}(\emptyset) = 0$.
- 2) $\text{vol}([0, 1]^n) = \text{vol}([0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]) = 1$.
- 3) Jede *Bewegung* $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Raums \mathbb{R}^n erhält das Volumen.
- 4) Sind Teilmengen A_1, \dots, A_k in \mathbb{R}^n disjunkt, so gilt

$$\text{vol}(\cup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \text{vol}(A_i) .$$

Unter einer *Bewegung* verstehen wir eine Isometrie, d.h. eine abstandserhaltende Abbildung. (Frage: Was heißt das genau? Wie sehen alle Bewegungen von \mathbb{R}^n in Termen der linearen Algebra aus?)

Wir folgen in (4) und überall später der Konvention, dass $a + \infty = \infty$ für jede Zahl $a \in (-\infty, \infty]$ gilt.

Weitere Wünsche wären:

1') Niedrig-dimensionale Teilmengen, also solche die in Hyperebenen enthalten sind, sollten Volumen 0 haben.

3') Eine 1-Lipschitz Abbildung, d.h. eine die Abstände nicht-vergrößernde Abbildung, sollte das Volumen nicht vergrößern.

4') Auch für eine abzählbare Folge paarweise disjunkter Mengen A_i sollte gelten

$$\text{vol}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(A_i) .$$

Es stellt sich jedoch heraus, dass (unter der Annahme des sogenannten Auswahlaxioms, eines natürlichen Axioms der Mengenlehre) es kein Volumen vol_3 im \mathbb{R}^3 gibt, das die Eigenschaften 1-4 erfüllt.

Aufgabe: Lesen Sie nach, was das Banach-Tarski-Paradoxon besagt und wundern Sie sich darüber!

Ein einfacheres Beispiel zeigt, dass es sogar kein Volumen in \mathbb{R} geben kann, das die Eigenschaften 1-3 und 4' erfüllt.

Sei dazu $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $a + q \in A$.

In anderen Worten, A enthält genau einen Repräsentanten jeder \mathbb{Q} -Nebenklasse in \mathbb{R} . (Aufgabe: erinnern Sie sich, was das bedeutet. Was hat die Existenz von A mit dem Auswahlaxiom zu tun?).

Sei $T_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Addition von q , also $T_q(x) = q + x$. Dann bedeutet die Bedingung an A , dass

$$\mathbb{R} = \cup_{q \in \mathbb{Q}} T_q(A)$$

und dass diese Vereinigung disjunkt ist.

Mit Hilfe von (2) und (3) folgt $\text{vol}(\mathbb{R}) = \infty$. Ferner kann man aus (2) und (3) die Ungleichung $\text{vol}_1([0, 2]) \leq 2$ folgern.

Mit Hilfe von (2) und (3), (4') und der Abzählbarkeit von \mathbb{Q} folgt $\text{vol}(A) > 0$. Nochmal dasselbe Argument zeigt, dass es ein natürliches m geben muss, so dass für $A' := A \cap [m, m + 1)$ die Ungleichung $\text{vol}(A') > 0$ gilt.

Sei o.B.d.A. $m = 0$. Seien q_1, \dots, q_i, \dots die rationalen Zahlen in $[0, 1]$. Die Mengen $T_{q_i}(A')$ sind paarweise disjunkt und alle in $[0, 2]$ enthalten. Es folgt (wieder mit (2) und (3)), dass das Intervall $[0, 2]$ unendliches Volumen hat und damit ein Widerspruch.

Schwierige Aufgabe: Verstehen Sie die obige Argumentation.

1.6. Lösungsansatz. Statt an den Wünschen an vol_n Abstriche zu machen, engen wir den Kreis der "zulässigen" Teilmengen ein, die ein "vernünftiges" Volumen haben sollten, um Anomalien zu vermeiden.

Wir wollen das Volumen als Maß betrachten, das gewisse Teilmengen von \mathbb{R}^n "misst". Die zulässigen Teilmengen, die es "vernünftig" misst, sollen die *messbaren* Teilmengen genannt werden.

Alle Teilmengen, die in Analysis "entstehen", sollten messbar sein. Auf jeden Fall sollten *Quader* messbar sein.

Ferner sollen *abzählbare* Vereinigungen und Durchschnitte von messbaren Teilmengen messbar sein, auch um eine Bestimmung von Volumina und Integralen mit "Grenzübergängen" zu ermöglichen.

Wir formalisieren die Idee und verallgemeinern sie über den Euklidischen Raum hinaus.

2. SIGMA-ALGEBREN

2.1. Definition. Sei X eine Menge. Die Potenzmenge

$$\mathcal{P}(X)$$

ist die Menge aller Teilmengen $A \subset X$.

Für eine Teilmenge $A \subset X$ bezeichnen wir mit

$$A^c := X \setminus A$$

das Komplement von A (in X).

Es gibt zahlreiche algebraische Identitäten zwischen den Operationen Vereinigung, Durchschnitt und Komplementbildung, z.B.

$$(2.1) \quad A \setminus (\cup E_i) = \cap (A \setminus E_i),$$

die man sich in einem Mengendiagramm klarmacht.

Definition 2.1. Eine σ -Algebra auf einer nicht-leeren Menge X ist eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, für die gilt:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- (2) Wenn $E \in \mathcal{A}$ dann $E^c \in \mathcal{A}$.
- (3) Für jede Folge $E_i \in \mathcal{A}$ gilt $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$.

2.2. Einfache Beispiele und Eigenschaften. Eine σ -Algebra ist niemals leer (Warum?). Die kleinste (Frage: In welchem Sinn?) σ -Algebra auf X besteht aus zwei Elementen

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}.$$

Die größte σ -Algebra auf X ist $\mathcal{P}(X)$.

Ein weiteres Beispiel ist gegeben als die Menge aller Teilmengen $E \subset X$, für die entweder E oder E^c endlich oder abzählbar ist (Frage: warum ist es eine σ -Algebra?).

Aus (2.1) folgt

Lemma 2.2. Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X . Für jede Folge $E_i \in \mathcal{A}$ ist der Durchschnitt $\cap E_i$ in \mathcal{A} . Für $E, F \in \mathcal{A}$ gilt $E \setminus F, E \cup F, E \cap F \in \mathcal{A}$.

2.3. Erzeugte σ -Algebren. Ist $\mathcal{A}_b, b \in B$ eine Menge von σ -Algebren auf X , indiziert über eine Menge B (Frage: was heißt das?), so ist

$$\mathcal{A} := \bigcap_{b \in B} \mathcal{A}_b = \{E \subset X : \forall b \in B, E \in \mathcal{A}_b\}$$

eine σ -Algebra (Frage: warum?).

Ein ganz wichtiges Beispiel ergibt sich wie folgt. Ist \mathcal{E} eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$. Dann ist der Durchschnitt aller σ -Algebren \mathcal{A} auf X , die \mathcal{E} enthalten, eine σ -Algebra auf X . Es ist die kleinste σ -Algebra auf X , die \mathcal{E} enthält. Sie heißt "die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra" und wird von uns als $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ bezeichnet.

Wir stellen uns vor, dass \mathcal{E} eine Ausgangsmenge von "sehr guten" Teilmengen von X ist, an denen wir hauptsächlich interessiert sind. Und $\sigma(\mathcal{E})$ besteht aus weniger guten Teilmengen, die sich aber aus \mathcal{E} durch abzählbare Folgen natürlicher Mengenoperationen ergeben.

Um $\sigma(\mathcal{E})$ zu erhalten würde man (naiv vorgehend) mit \mathcal{E} anfangen und zu \mathcal{E} alle abzählbaren Vereinigungen von Elementen aus \mathcal{E} hinzunehmen. Dann wären (1) und (3) aus der Definition der σ -Algebra erfüllt. Dann würden wir alle Komplemente hinzunehmen, um (2) zu erhalten. Danach müsste man nochmal abzählbare Vereinigungen nehmen, u.s.w.. Vorsicht: Selbst wenn man diesen Prozess abzählbar oft iteriert, erhält man immer noch nicht unbedingt alles von $\sigma(\mathcal{E})$!

Aufgabe: Wieso ergibt das oben beschriebene Verfahren nicht unbedingt $\sigma(\mathcal{E})$?

Aufgabe: Was ist die $\sigma(\mathcal{E})$, wenn $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, aus allen 1-elementigen Teilmengen von X besteht?

2.4. Borelsche σ -Algebra. Sei X ein metrischer Raum. Sei $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ die Menge aller offenen Teilmengen von X . Die *Borelsche σ -Algebra* von X (einfacher die *Borel-Algebra* von X) ist

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}(X))$$

die von $\mathcal{O}(X)$ erzeugte σ -Algebra auf der Menge X . Die Elemente von $\mathcal{B}(X)$ heißen Borel-Mengen (in X).

Jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge ist borelsch. Jedes halboffene Intervall ist borelsch in \mathbb{R} .

Wir nennen im Folgenden einen Quader $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ *rational*, wenn für $1 \leq j \leq n$ die Grenzen des Intervalls I_j rationale Zahlen sind.

Aufgabe: Es gibt nur abzählbar viele rationale Quader. Jeder kompakte Quader ist ein Durchschnitt einer absteigenden Folge rationaler offener Quader.

Der Beweis des folgenden Lemmas wird als Aufgabe überlassen. Es zeigt, dass wir aus Quadern alle anderen Borelschen Mengen durch "abzählbare" Durchschnitte und Vereinigungen erzeugen können, und dass deshalb, wir in der Theorie der Volumina mit allen Borel-Mengen arbeiten sollten.

Lemma 2.3. *In $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ betrachte die Teilmengen \mathcal{Q}_{off} , $\mathcal{Q}_{off,q}$, \mathcal{Q}_{kpt} , $\mathcal{Q}_{kpt,q}$ bestehend aus allen offenen bzw. aus allen kompakten Quadern, bzw. allen solchen rationalen Quadern. Dann gilt*

$$\sigma(\mathcal{Q}_{kpt}) = \sigma(\mathcal{Q}_{off}) = \sigma(\mathcal{Q}_{kpt,q}) = \sigma(\mathcal{Q}_{off,q}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) .$$

Warnung 1: Benutzt man das Auswahlaxiom (was wir immer tun), so folgt die Existenz von Teilmengen, die keine Borelmengen sind.

Warnung 2: Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, die keine Borelmenge ist, so ist aber A eine Borelteilmenge von sich selbst (betrachtet als metrischer Raum), $A \in \mathcal{B}(A)$. Die Identität $Id : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig und schickt nicht alle Borel-Mengen auf Borel-Mengen.

Wie für offene Teilmengen gilt aber:

Lemma 2.4. *Sind X, Y metrische Räume und ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist für jedes $B \in \mathcal{B}(Y)$ das Urbild $f^{-1}(B)$ eine Borel-Menge in X .*

Beweis. Da Komplemente und Vereinigungen mit Urbildern "kommutieren" (was heißt das?), ist die Menge $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$, gegeben durch

$$\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{B}(Y) : f^{-1}(C) \in \mathcal{B}(X)\} ,$$

eine σ -Algebra.

Wegen der Stetigkeit von f enthält \mathcal{C} alle offenen Mengen $\mathcal{O}(Y)$. Wegen der Minimalität von $\mathcal{B}(Y)$ muss also $\mathcal{C} = \mathcal{B}(Y)$ gelten. \square

Insbesondere folgt:

Korollar 2.5. *Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus, so ist $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Borel-Menge genau dann, wenn $f(B)$ eine Borel-Menge ist.*

Aufgabe: Verstehen Sie Details des Beweises und das Korollar.

Nun können wir unser Ziel etwas anpassen und folgenden Satz formulieren, der im Laufe der folgenden Vorlesungen bewiesen wird:

SATZ 2.6. *Es gibt genau eine Abbildung $\text{vol} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, die die Eigenschaften (1), (2), (4') aus Kapitel 1.5 erfüllt und die invariant unter allen Translationen ist. Für sie gelten auch die Eigenschaften (3), (4), (1') und (3').*

3. MASSE UND MASSRÄUME

3.1. Definition und Zählbeispiele. Wir verallgemeinern die Idee des Volumens, so dass es physikalisch unter anderem zur Beschreibung der Masse von nicht homogenen Objekten dienen kann.

Definition 3.1. Sei X eine Menge und \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X . Ein Maß auf \mathcal{A} ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, wenn $E_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt sind.

Das Tripel (X, \mathcal{A}, μ) heißt Maßraum.

Wir sagen manchmal (häufig) auch, das Maß sei auf X definiert, besonders wenn \mathcal{A} klar ist oder keine große Rolle spielt.

Die einzigen Maßräume, die man mühelos beschreiben kann, sind die folgenden.

Sei X eine Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Setze $\mu(E) := \#E$, die Anzahl der Elemente in E .

Etwas allgemeiner, sei $w : X \rightarrow [0, \infty]$ eine beliebige "Dichte-Funktion". Setze $\mu_w(E) := \sum_{x \in E} w(x)$.

Aufgabe: was ist die formale Definition der obigen Summe bei unendlichen (überabzählbaren) E ?

Für einen Punkt $x \in X$ und die Funktion $w = \chi_x : X \rightarrow [0, \infty]$, gegeben durch $\chi_x(x) = 1$ und $\chi_x(y) = 0$ für alle $y \neq x$, nennt man μ_w das Diracmaß im Punkte x und bezeichnet es mit δ_x .

3.2. Eigenschaften. Jeder Maßraum erfüllt:

Proposition 3.2. Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Seien E_i eine Folge von Elementen in \mathcal{A} . Dann gilt:

(1) $\mu(E_1 \cup E_2) + \mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

(2) Gilt $E_1 \subset E_2$ dann $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.

(3) $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

(4) Gilt $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ dann

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i) .$$

(5) Gilt $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ und $\mu(E_1) < \infty$ dann

$$\mu(\cap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i) .$$

Aufgabe: Finde Beispiele für das Zählmaß oder für das Volumen (das wir noch nicht definiert haben), die zeigen, dass die Bedingung $\mu(E_1) < \infty$ im letzten Punkt wichtig ist.

Beweis. Aufgabe: Beweisen Sie (1) und (2).

(3) folgt, wenn man $F_i := E_i \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} E_j)$ setzt und beobachtet, dass

$$\cup_{i=1}^{\infty} E_i = \cup_{i=1}^{\infty} F_i$$

gilt, dass die F_i disjunkt sind und $\mu(F_i) \leq \mu(E_i)$ gilt.

(4) folgt, wenn man dieselben Mengen F_i benutzt und beobachtet, dass in diesem Fall

$$\sum_{j=1}^m \mu(F_j) = \mu(E_m) .$$

(5) folgt indem wir (4) auf die Mengen $E_i^* := E_1 \setminus E_i$ anwenden. \square

4. ÄUSSERES MASS

4.1. Definition. Um zu einem Maß, insbesondere zum Volumen zu gelangen, gehen wir einen kleinen Umweg und betrachten etwas "gröbere" Messungen, bei denen "Messbarkeit" keine Rolle spielt.

Definition 4.1. Ein äußeres Maß auf einer Menge X ist eine Abbildung $\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$, so dass für alle Folgen $E_i \in \mathcal{P}(X)$

- (1) $\alpha(\emptyset) = 0$.
- (2) Ist $E_1 \subset E_2$ so ist $\alpha(E_1) \leq \alpha(E_2)$.
- (3) Es gilt $\alpha(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(E_i)$.

Äußere Maße sind viel einfacher zu finden als "echte" Maße. Es wird sich jedoch herausstellen, dass wir mit Hilfe von äußeren Maßen auch echte Maße (mit gewünschten Eigenschaften) finden können.

Die "Rückrichtung" ist viel einfacher. Wie wir in einer Hausaufgabe sehen werden, definiert für jedes Maß μ auf $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ die Abbildung

$$\alpha(F) := \inf\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}; F \subset E\}$$

ein äußeres Maß auf X , so dass $\mu(E) = \alpha(E)$ für alle $E \in \mathcal{A}$ gilt.

4.2. Konstruktion von äußeren Maßen. Bevor wir aus äußeren Maßen, echte Maße konstruieren, beschreiben wir ein einfaches Vorgehen, das viele "natürliche" äußere Maße beschreibt.

Sei dazu X eine Menge, sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge und sei $\nu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ beliebig.

(Wir stellen uns X als einen metrischen Raum (etwa \mathbb{R}^n) und \mathcal{E} als "gut verständliche Mengen" vor, etwa Bälle oder Quader. Die Funktion ν soll eine einfache "geometrische" Größe sein, etwa der Durchmesser

$$\text{diam}(E) := \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}$$

oder eine Funktion, die von dem Durchmesser abhängt.)

Lemma 4.2. Für $\nu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ definiere $\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ als

$$\alpha(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i ; E_i \in \mathcal{E} \right\},$$

für $E \neq \emptyset$ und $\alpha(\emptyset) := 0$. Dann ist α ein äußeres Maß.

Falls E nicht durch abzählbar viele $E_i \in \mathcal{E}$ überdeckt werden kann, so ist der Wert $\alpha(E)$ nach Definition unendlich.

Aufgabe: Beweisen Sie das Lemma.

4.3. Nullmengen. Ist $\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß, so nennen wir eine Teilmenge $E \subset X$ eine *Nullmenge* oder eine α -Nullmenge, wenn $\alpha(E) = 0$ gilt.

Aus der Definition ergibt sich direkt, dass jede Teilmenge einer Nullmenge eine Nullmenge ist. Ferner ist eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge.

Ist $E \subset X$ beliebig und F eine Nullmenge, so gilt

$$\alpha(E \cup F) = \alpha(E \setminus F) = \alpha(E).$$

Aufgabe: verifizieren Sie die obige Gleichung.

5. DAS ÄUSSERE LEBESGUE-MASS

5.1. Definition. Wir kehren später zu allgemeineren Räumen zurück und konzentrieren uns nun auf die Definition des Volumens im \mathbb{R}^n . Die Idee ist jedem Schüler vertraut (Flächenbestimmung auf kariertem Papier). Wir wissen, was das Volumen von Quadern sein soll und versuchen eine beliebige Menge mit Quadern zu überdecken, so dass das Gesamtvolumen der Quader möglichst klein ist.

Zunächst definieren wir für jeden Quader $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ das *Volumen* von Q als

$$\text{vol}(Q) := \ell(I_1) \cdot \ell(I_2) \cdot \dots \cdot \ell(I_n),$$

wobei $\ell(I) \in [0, \infty)$ für ein beschränktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ die Länge von I , also den Abstand der beiden Randpunkte von I bezeichnet.

Definition 5.1. Sei $\nu = \text{vol} : \mathcal{Q}_{\text{off},q} \rightarrow (0, \infty)$ das obige Volumen auf der Menge der offenen rationalen Quadern. Das durch ν gemäß Lemma 4.2 definierte äußere Maß heißt das *äußere Lebesgue-Maß* auf \mathbb{R}^n . Wir bezeichnen das äußere Lebesgue-Maß als λ oder als λ_n .

5.2. Erste Eigenschaften. Jede Translation $T_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $T_v(x) = v + x$ schickt (offene) Quader auf (offene) Quader und erhält das Volumen (Frage: Was heißt und warum gilt das?). Es folgt:

Lemma 5.2. *Jede Translation T_v erhält λ , d.h., für $v \in \mathbb{R}^n$ und $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda(v + E) = \lambda(E)$, wobei wir $v + E := T_v(E)$ setzen.*

Aufgabe: Verifiziere das Lemma.

Die nächste Eigenschaft ist der Vorläufer der gewünschten Eigenschaft (1'). Unter einer *achsenparallelen affinen Hyperebene* verstehen wir eine Teilmenge H aller Punkte in \mathbb{R}^n bei denen die i -te Koordinate einen festen Wert a_i annimmt, also $H = \mathbb{R} \times \dots \times \{a_i\} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}$.

Lemma 5.3. *Jede affine achsenparallele Hyperebene H ist eine λ -Nullmenge.*

Der Beweis ergibt sich durch eine Überdeckung von H durch abzählbar viele kompakte Blöcke der Form $[a_1, b_1] \times \dots \times \{a_i\} \times \dots \times [a_n, b_n]$. Jeden solchen Block kann man durch einen offenen Quader mit beliebig kleinem Volumen überdecken.

Aufgabe: Verstehen Sie alle ausgelassenen Details!

Für einen Quader Q unterscheiden sich \bar{Q} und die Menge der Inneren Punkte Q^0 (die beide selbst Quader sind) um eine endliche Vereinigung von Teilmengen, die in einer achsenparallelen affinen Hyperebene enthalten sind. Also gilt für jeden Quader Q

$$\lambda(Q) = \lambda(Q^0) = \lambda(\bar{Q}) .$$

Aufgabe: Verstehen Sie alle ausgelassenen Details!

Lemma 5.4. *Für jeden Quader Q gilt $\lambda(Q) = \text{vol}(Q)$.*

Aufgabe: Vor dem Lesen des Beweises überlegen Sie, warum die Aussage nicht trivial ist und was gezeigt werden muss.

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten. Die Details sollten eigenständig gefüllt werden. Überlegen Sie insbesondere, wofür man Kompaktheit und Rationalität im Beweis braucht.

1. Es reicht die Aussage für kompakte, rationale Quader Q zu beweisen.

2. Die Aussage $\lambda(Q) \leq \text{vol}(Q)$ gilt für solche und damit für alle anderen Quader.

3. Sei nun ein kompakter rationaler Quader Q gewählt. Sei Q^j eine abzählbare Überdeckung von Q durch rationale offene Quader. Es reicht zu zeigen, dass

$$\text{vol}(Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(Q^j) .$$

4. Wir können eine endliche Teilüberdeckung Q^1, \dots, Q^m von Q finden.

5. Wir finden einen gemeinsamen Nenner k aller Randkoordinaten a_i, b_i und a_i^j, b_i^j von Q und allen $Q^j, j = 1, \dots, m$ (was heißt das?).

6. Q enthält genau $\text{vol}(Q) \cdot k^n$ disjunkte offene Würfel mit Seitenlängen $\frac{1}{k}$ und allen Ecken mit Koordinaten $\frac{l}{k}, l \in \mathbb{Z}$.

7. Eine analoge Abschätzung gilt für alle Q^j . Das Abzählen der Würfel zeigt

$$\text{vol}(Q) \cdot k^n \leq \sum_{j=1}^m \text{vol}(Q_j) \cdot k^n,$$

und damit die gewünschte Aussage. □

Jede Menge kann durch offene größere Mengen mit fast demselben Lebesgue-Maß approximiert werden:

Lemma 5.5. *Für jede Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine Folge offener Mengen $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_m \supset \dots$ mit $E \subset \cap U_i$ und*

$$\lambda(E) = \lambda(\cap_{i=1}^{\infty} U_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(U_i).$$

Beweis. Die Aussage ist klar im Fall $\lambda(E) = \infty$.

Ist $a := \lambda(E) < \infty$ so finden wir für jedes $m > 0$ eine Überdeckung von E durch offene rationale Quader Q_j , so dass

$$a + \frac{1}{m} \geq \sum \text{vol}(Q_j).$$

Für die offene Menge $V_m := \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$ gilt dann (warum?)

$$a + \frac{1}{m} \geq \lambda(V_m).$$

Setze $U_m := \cap_{i=1}^m V_m$.

Dann bilden U_m eine absteigende Folge offener Teilmengen, die alle E enthalten, und es gilt (warum?) $a + \frac{1}{m} \geq \lambda(U_m) \geq a$.

Daraus folgt die Aussage (warum?). □

Das äußere Lebesgue-Maß bleibt gleich, wenn wir uns bei der Wahl der überdeckenden Quader auf beliebig kleine Quader einschränken.

Lemma 5.6. *Sei $\epsilon > 0$ und $E \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Der Wert $\lambda(E)$ ändert sich nicht, wenn wir in der Definition 5.1 die Menge $\mathcal{Q}_{\text{off},q}$ durch die Teilmenge $\mathcal{Q}_{\text{off},q}^\epsilon$ von allen offenen, rationalen Quadern mit Durchmesser kleiner ϵ ersetzen.*

Beweis. Bezeichnen wir das neue äußere Maß mit λ^ϵ , so gilt $\lambda^\epsilon \geq \lambda$ (Frage: welches Maß und warum gilt die Aussage?).

Um die Ungleichung $\lambda(E) \geq \lambda^\epsilon(E)$ für alle E zu beweisen, reicht es, die Aussage für alle $E \in \mathcal{Q}_{off,q}$ zu zeigen.

Nun gilt aber die Gleichheit

$$\lambda(Q) = \lambda^\epsilon(Q) = \text{vol}(Q)$$

für alle rationalen Quader mit Durchmesser $< \epsilon$ (Warum?). Jedes $Q \in \mathcal{Q}_{off,q}$ kann man durch endlich kompakte rationale Quader Q_j mit Durchmesser $< \epsilon$ überdecken, so dass

$$\text{vol}(Q) = \sum \text{vol}(Q_j)$$

gilt (wie überdeckt man?).

Daraus folgt

$$\lambda^\epsilon(Q) \leq \sum \text{vol}(Q_j) = \lambda(Q)$$

und damit die Aussage des Lemmas. \square

Letztlich zeigen wir, dass das äußere Lebesgue-Maß additiv ist bei Teilmengen, die nicht nur disjunkt sind, sondern in positivem Abstand voneinander liegen.

Für Teilmengen E, F eines metrischen Raums X definieren wir den *Abstand von E und F* als

$$d(E, F) := \inf\{d(x, y) : x \in E, y \in F\} .$$

Gilt $d(E, F) > 0$, so sind E und F disjunkt, aber nicht umgekehrt (Beispiel?).

Sind E und F kompakt und disjunkt, dann gilt $d(E, F) > 0$ (Warum?).

Lemma 5.7. *Seien $E, F \subset \mathbb{R}^n$ mit $\epsilon := d(E, F) > 0$ gegeben. Dann*

$$\lambda(E \cup F) = \lambda(E) + \lambda(F) .$$

Beweis. Die Ungleichung \leq gilt für jedes äußere Maß.

Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, benutzen wir $\lambda = \lambda^\epsilon$ in den Bezeichnungen des Beweises von Lemma 5.6.

Fixiere $m > 0$ und wähle nun eine Überdeckung von $E \cup F$ durch $Q_j \in \mathcal{Q}_{off,q}^\epsilon$, so dass

$$\lambda(E \cup F) + \frac{1}{m} \geq \sum_j (\text{vol}(Q_j)) .$$

Wir dürfen alle Q_j entfernen, die $E \cup F$ nicht schneiden. Die verbleibenden Q_j teilen sich in diejenigen, die nur E und diejenigen, die nur F schneiden (warum?).

Dies ergibt also eine Aufteilung aller Q_j in solche, die E und solche, die F überdecken. Die Summe der Volumina der Q_j der ersten Sorte gibt eine obere Schranke an $\lambda(E)$, die der zweiten Sorte an $\lambda(F)$.

Insgesamt folgt

$$\sum_j (\text{vol}(Q_j)) \geq \lambda(E) + \lambda(F)$$

und damit die Aussage. \square

Aufgabe: Wieso wurde das Argument nicht direkt mit λ statt λ^ϵ durchgeführt?

6. VOM ÄUSSEREN MASS ZUM MASS

6.1. Konstruktion von Carathéodory. Die folgende Konstruktion, die aus einem äußeren Maß ein Maß "herausschneidet", ist ganz allgemein und unabhängig von der metrischen Struktur. Sie definiert eine σ -Algebra von sogenannten "messbaren" Teilmengen, als solche Teilmengen, die jede andere Teilmenge in einer "sauberen" Weise schneiden, so dass beide Teile in gewisser Weise voneinander getrennt sind.

Schwierige Aufgabe: Schauen Sie sich Lemma 5.7 an und versuchen Sie sich, aus der folgenden Definition einen Sinn herauszuschälen.

Definition 6.1. Sei $\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Eine Teilmenge E heißt α -messbar, wenn für alle $A \subset X$ gilt

$$\alpha(A) = \alpha(A \cap E) + \alpha(A \cap E^c) .$$

Nun gilt:

SATZ 6.2. Die Menge $\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{P}(X)$ der α -messbaren Teilmengen ist eine σ -Algebra, die alle α -Nullmengen enthält.

Die Einschränkung $\alpha : \mathcal{M}_\alpha \rightarrow [0, \infty]$ ist ein Maß.

Beweis. Nach Definition ist $E^c \in \mathcal{M}_\alpha$, wenn E in \mathcal{M}_α liegt.

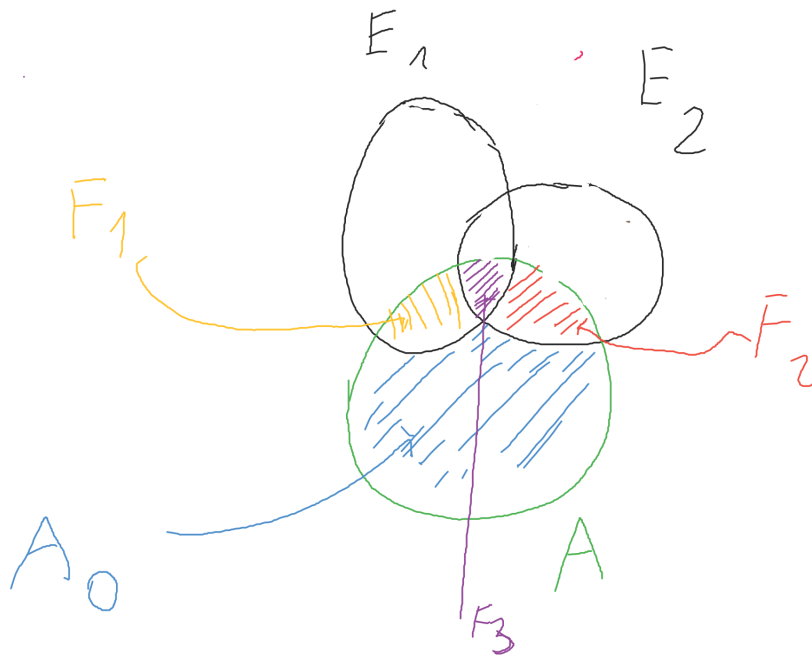
Für jede α -Nullmenge E und jedes $A \subset X$ gilt

$$\alpha(A \cap E) = 0 \quad \alpha(A \setminus E) = \alpha(A) .$$

Also ist jede α -Nullmenge, insbesondere die leere Menge in \mathcal{M}_α .

Nun zeigen wir, dass für $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_\alpha$ auch $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}_\alpha$ gilt. Wir wählen beliebiges $A \subset X$ und argumentieren im beigefügten Bild.

Konstruktion von Carathéodory



$$\alpha(A_0) + \alpha(F_1) = \alpha(A_0 \cup F_1) ; \alpha(F_2) + \alpha(F_3) = \alpha(F_2 \cup F_3) ,$$

weil E_1 messbar ist. Ferner ist

$$\alpha(A_0 \cup F_1) + \alpha(F_2 \cup F_3) = \alpha(A) ,$$

weil E_2 messbar ist. Also

$$\alpha(A) = \alpha(A_0) + \alpha(F_1) + \alpha(F_2) + \alpha(F_3) \geq \alpha(A_0) + \alpha(F_1 \cup F_2 \cup F_3) .$$

Weil α ein äußeres Maß ist, gilt Gleichheit. Das zeigt $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}_\alpha$.

Mit Induktion und (2.1) ist \mathcal{M}_α invariant unter endlichen Vereinigungen und Durchschnitten.

Sind E_1 und E_2 in \mathcal{M}_α disjunkt, so folgt aus der Messbarkeit von E_1 , angewendet auf $A := E_1 \cup E_2$, die Gleichheit

$$\alpha(E_1) + \alpha(E_2) = \alpha(E_1 \cup E_2) .$$

Ist E_i eine Folge in \mathcal{M}_α , so setze $F_i := E_i \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} E_j)$. Dann sind $F_i \in \mathcal{M}_\alpha$ disjunkt und es gilt

$$F := \cup_{i=1}^{\infty} F_i = \cup_{i=1}^{\infty} E_i .$$

$$\alpha(F) \geq \alpha(\cup_{j=1}^i F_j) = \sum_{j=1}^i \alpha(F_j) .$$

Weil andererseits α ein äußeres Maß ist, gilt

$$\alpha(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(F_j)$$

und damit auch die Gleichheit in der obigen Ungleichung.

Man muss nur noch $F \in \mathcal{M}_\alpha$ verifizieren. Sei $A \subset X$ beliebig. Wie oben zeigt man, dass

$$\alpha(A \cap F) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(A \cap F_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(A \cap \tilde{F}_i) ,$$

mit $\tilde{F}_i = \cup_{j=1}^i F_j$. Es gilt

$$\alpha(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\alpha(A \cap \tilde{F}_i) + \alpha(A \cap \tilde{F}_i^c)) = \alpha(A \cap F) + \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(A \cap \tilde{F}_i^c) \geq \alpha(A \cap F) + \alpha(A \cap F^c)$$

Das beendet den Beweis. \square

6.2. Vollständigkeit. Ein Maß μ auf einer σ -Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *vollständig*, wenn für jede Menge $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) = 0$, jede Teilmenge von E in \mathcal{A} enthalten ist. Nach Satz 6.2 ist für jedes äußere Maß α die Einschränkung $\alpha : \mathcal{M}_\alpha \rightarrow [0, \infty]$ ein vollständiges Maß.

Auch jedes nicht vollständige Maß lässt sich einfach (siehe [Swe17]) zu einem vollständigen Maß erweitern. Wir werden im Folgenden nur vollständige Maße betrachten.

6.3. Das Kriterium von Carathéodory. Der folgende Satz, zusammen mit Lemma 5.7 zeigt, dass das äußere Lebesgue-Maß sich als ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ einschränkt (Aufgabe: Verstehen Sie die Details!).

SATZ 6.3. *Sei X ein metrischer Raum und $\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Wenn für je zwei Teilmengen $E, F \subset X$ mit $d(E, F) > 0$ die Gleichheit*

$$\alpha(E) + \alpha(F) = \alpha(E \cup F)$$

gilt, so ist jede Borel-Menge $B \in \mathcal{B}(X)$ α -messbar.

Beweis. Da \mathcal{M}_α eine σ -Algebra ist, reicht es zu zeigen, dass für jede offene Menge $O \subset X$ und jedes $A \subset X$ die Gleichheit

$$\alpha(O \cap A) + \alpha(A \cap O^c) = \alpha(A)$$

gilt. Die linke Seite ist nicht kleiner als die rechte, nach Definition eines äußeren Maßes. Also gilt die Gleichheit, falls $\alpha(A) = \infty$.

Wir können $\alpha(A) < \infty$ annehmen und müssen

$$\alpha(O \cap A) + \alpha(A \cap O^c) \leq \alpha(A)$$

beweisen.

Für natürliche m betrachte (Aufgabe: male ein Bild!)

$$O_m := \left\{ x \in O : d(x, O^c) > \frac{1}{m} \right\}.$$

Es gilt $O_1 \subset O_2 \subset \dots$ und, weil O offen ist, gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i = O$. Aus $d(O_m, O^c) \geq \frac{1}{m}$ folgern wir

$$\alpha(O_m \cap A) + \alpha(A \cap O^c) = \alpha(A \cap (O_m \cup O^c)) \leq \alpha(A).$$

Es reicht also nachzuweisen, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha(O_m \cap A) = \alpha(A \cap O).$$

Dafür muss man nur zeigen, dass $\alpha(A \cap (O \setminus O_m))$ gegen 0 konvergiert.

Setzen wir $S_m := A \cap (O_m \setminus O_{m-1})$, so gilt

$$A \cap (O \setminus O_m) = \bigcup_{i=m+1}^{\infty} S_i$$

und es reicht zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(S_i)$$

konvergiert.

Jedoch gilt für alle i, j mit $|i - j| \geq 2$, die Ungleichung $d(S_i, S_j) > 0$. Also gilt für alle natürlichen m

$$\sum_{i=1}^m \alpha(S_{2i}) = \alpha(\bigcup_{i=1}^{2m} S_{2i}) \leq \alpha(A),$$

und dieselbe Ungleichung gilt für alle Partialsummen

$$\sum_{i=1}^m \alpha(S_{2i+1}) \leq \alpha(A).$$

Also konvergiert die Reihe $\sum \alpha(S_i)$. Das beendet den Beweis (wieso?).

□

Das Lebesgue-Maß ist die Einschränkung $\lambda : \mathcal{M}_\lambda \rightarrow [0, \infty]$ des äußeren Lebesgue-Maßes. Wir bezeichnen es ebenfalls mit $\lambda = \lambda_n$ oder auch mit $\text{vol} = \text{vol}_n$. Wie eben gezeigt, definiert es insbesondere ein Maß auf der σ -Algebra der Borel-Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

7. LEBESGUE-MASS

7.1. Approximation von innen und außen. Die Existenz der offenen Mengen U_i , die jede Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ von außen approximieren, wurde bereits in Lemma 5.5 gezeigt.

Proposition 7.1. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine λ -messbare Menge. Dann gibt es Folgen offener Mengen $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ und Folgen kompakter Mengen $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, so dass*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \subset E \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$$

und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(K_i) = \lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i) = \lambda(E) = \lambda(\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(U_i).$$

Beweis. Um die Existenz der K_i nachzuweisen, können wir E mit Würfeln schneiden und uns auf den Fall beschränken, in dem E in einem kompakten Würfel W enthalten ist (Wieso?).

Mit Lemma 5.5 finden wir offene V_i mit $W \setminus E \subset V_i$ und

$$\lambda(V_i) < \lambda(W \setminus E) + \frac{1}{i}.$$

Dann ist $\hat{K}_i := W \setminus V_i$ kompakt und in E enthalten.

Ferner gilt (warum?)

$$\lambda(\hat{K}_i) \geq \lambda(E) - \frac{1}{i}.$$

Indem wir $K_i = \bigcup_{j=1}^i \hat{K}_j$ setzen beenden wir den Beweis. □

Frage: Wo wurde die Messbarkeit von E benutzt?

Wir machen die folgende fundamentale Beobachtung:

Proposition 7.2. *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer, so ist $\lambda(U) > 0$.*

Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so ist $\lambda(K) < \infty$. Das gilt insbesondere für alle kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$.

Aufgabe: Beweise die Proposition.

7.2. Struktur der Lebesgue-messbaren Mengen. Nach Definition ist $E \subset \mathbb{R}^n$ eine λ -Nullmenge genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Überdeckung $E \subset \bigcup Q_i$ durch Quader gibt, so dass $\sum \text{vol}(Q_i) < \epsilon$.

Alle λ -Nullmengen sind λ -messbar und alle Borelmengen sind λ -messbar. Die folgende Aussage zeigt, dass der Unterschied zwischen Borel-Mengen und λ -messbaren Mengen sehr klein ist.

Proposition 7.3. Für jede λ -messbare Menge E gibt es Borel Mengen $B_1 \subset E \subset B_2$, so dass

$$\lambda(B_2 \setminus B_1) = \lambda(B_2 \setminus E) = \lambda(E \setminus B_1) = 0 .$$

Insbesondere kann man jede messbare Menge als eine disjunkte Vereinigung einer Borel-Menge und einer λ -Nullmenge schreiben.

Beweis. Indem wir E als abzählbare Vereinigung $E = \cup_i (E \cap W_i)$ schreiben, mit Würfeln W_i , reduzieren wir (wie?) die Aussage auf den Fall $\lambda(E) < \infty$.

In diesem Fall wähle U_i und K_i wie in Proposition 7.1 und setze

$$B_1 := \cup_{i=1}^{\infty} K_i ; B_2 := \cap_{i=1}^{\infty} U_i .$$

Dann folgt $\lambda(B_1) = \lambda(E) = \lambda(B_2)$ und damit die Behauptung. \square

7.3. Einige ungewöhnliche Beispiele. Wir haben eine recht komplizierte Theorie des Volumens entwickelt, können aber bis jetzt nur das Volumen von Quadern ausrechnen und solchen Teilmengen, die sich in (fast) disjunkte Vereinigungen von Quadern zerlegen lassen.

Aufgabe: Was (kann, soll) das Wort "fast" im letzten Satz bedeuten?

Wir beschreiben nun genauer das Beispiel der Cantor-Mengen.

Sei $a_i > 0$ eine Folge mit

$$a := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} a_i \leq 1 .$$

Wir entfernen aus der Mitte von $C_0 = [0, 1]$ ein offenes Intervall der Länge a_1 . Es entsteht eine Menge $C_1 \subset C_0$, die aus zwei Intervallen gleicher Länge besteht. Induktiv konstruieren wir kompakte Mengen $C_m \subset C_{m-1} \subset \dots \subset C_1$, so dass C_m aus 2^m disjunkten kompakten Intervallen gleicher Länge

$$c_m = \frac{1}{2} \cdot (c_{m-1} - a_{m-1})$$

besteht. Nun entfernen aus der Mitte von jedem der kompakten Intervalle von C_m ein offenes Intervall der Länge a_m , um C_{m+1} zu erhalten. Wir sehen

$$\lambda_1(C_m) = 2^m \cdot c_m = 2^{m-1} c_{m-1} - 2^{m-1} \cdot a_{m-1} = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} 2^{i-1} \cdot a_i .$$

Der Durchschnitt der absteigenden Folge $C = \cap_{i=1}^{\infty} C_i$ heißt eine Cantor-Menge. Für jede Wahl der Zahlen a_i enthält die kompakte Menge C kein einziges offenes Intervall (Aufgabe: Beweisen Sie es)!

Ferner gilt,

$$\lambda_1(C) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(C_m) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \cdot a_i = 1 - a .$$

Ist $a < 1$, z.B. $a_i = 2^{-i-1}$ (man spricht von einer *fetten Cantor-Menge*) so ist C eine kompakte Menge mit leerem Innerem, also $C = \bar{C} = \partial C$ und

$$\lambda(C) \geq 1 - a > 0 .$$

Die ‘‘bekannteste’’ Cantor-Menge entsteht durch die Wahl $a_i = 3^{-i}$. In diesem Fall gilt $\lambda(C) = 1 - a = 0$.

Das Beispiel zeigt, dass bereits in Dimension 1 auch für kompakte Mengen die naive Definition aus Kapitel 1.3 zu Problemen führt.

Eine andere einfache Konstruktion einer kompakten nirgends dichten Menge mit positivem Maß in jeder Dimension funktioniert wie folgt.

Wir notieren zunächst, dass $\lambda(B) \leq (2r)^n$ für Bälle B in \mathbb{R}^n mit Radius r gilt (warum?). Den genauen Wert $\lambda(B)$ werden wir (viel) später bestimmen.

Proposition 7.4. *Es gibt eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ohne innere Punkte mit $\lambda(K) > 0$.*

Beweis. Betrachte die Menge A der Punkte in \mathbb{R}^n , bei denen alle Koordinaten rational sind. Diese Menge können wir als eine Folge q_1, \dots, q_m, \dots schreiben. Sei U_i der Ball mit Radius $\frac{1}{2^{i+1}}$ um den Punkt q_i . Setze

$$U = \cup_{i=1}^{\infty} U_i .$$

Die Menge U ist offen in \mathbb{R}^n und $\bar{U} = \mathbb{R}^n$ (warum?). Ferner

$$\lambda(U) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (2^{-i})^n \leq 1 .$$

Sei K das Komplement $K = W_2 \setminus U$ von U im Würfel mit Seitenlänge 2. Dann ist $\lambda(K) \geq \lambda(W_2) - \lambda(U) > 0$ und K ist kompakt und hat keine inneren Punkte. \square

7.4. Vergleich mit der naiven Definition. Wir können jetzt auch einen rigorosen Vergleich mit der naiven Definition aus Kapitel 1.3 anstellen.

Proposition 7.5. *Für eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt in den Bezeichnungen aus Kapitel 1.3:*

$$\text{vol}^+(A) = \lambda(\bar{A}) \quad \text{und} \quad \text{vol}^-(A) = \lambda(A^\circ) ,$$

wobei \bar{A} den Abschluss und A° die Menge der inneren Punkte von A bezeichnet. Insbesondere gilt $\text{vol}^+(A) \geq \text{vol}^-(A)$ und die Gleichheit

$\text{vol}^+(A) = \text{vol}^-(A)$ ist äquivalent zu $\lambda(\partial A) = 0$, wobei $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ der topologische Rand von A ist.

Beweis. Nach Definition ändert sich der Wert von $\text{vol}^+(A)$ nicht, wenn wir nur endliche Überdeckungen $A \subset \cup Q_j$ durch kompakte Quader Q_j zulassen. Für jede solche Überdeckung gilt $\bar{A} \subset \cup Q_j$ (warum?). Es folgt direkt die Gleichheit $\text{vol}^+(A) = \text{vol}^+(\bar{A})$.

Genauso ändert sich der Wert von $\text{vol}^-(A)$ nicht, wenn wir in der Definition von $\text{vol}^-(A)$ nur disjunkte offene Quader $Q_j \subset A$ betrachten. Da in diesem Fall $\cup Q_j \subset A^\circ$ gilt, folgt $\text{vol}^-(A) = \text{vol}^-(A^\circ)$.

Es reicht also für kompakte A die Gleichheit $\text{vol}^+(A) = \lambda(A)$ und für offene O die Gleichheit $\text{vol}^-(O) = \lambda(O)$ zu beweisen.

Sei zunächst A kompakt. Die Aussage $\lambda(A) \leq \text{vol}^+(A)$ folgt direkt aus der Definition, da rechts das Infimum über eine kleinere Menge von Überdeckungen gebildet wird.

Andererseits, finden wir eine abzählbare Überdeckung Q_j von A durch offene Quader, so dass $\sum \text{vol}(Q_j)$ beliebig nah an $\lambda(A)$ ist, Lemma 5.6. Wegen der Kompaktheit von A , reichen endlich viele dieser Q_j , um A zu überdecken. Daraus folgt, $\text{vol}^+(A) \leq \lambda(A)$.

Sei nun O offen. Wie vorher gilt $\lambda(O) \geq \text{vol}^-(O)$ aus der Definition, Lemma 5.4 und der Tatsache, dass λ ein Maß auf der Borel-Algebra ist.

Nun betrachten wir, wie im Beweis von Satz 6.3 die Teilmengen

$$O_m := \{x \in O : d(x, O^c) > \frac{1}{m}\}.$$

Wir betrachten alle kompakten Würfel, die Seitenlängen $\frac{1}{m}$, deren Ecken alle Koordinaten der Form $\frac{k_i}{m}$ mit ganzzahligen k_i haben. Je zwei solcher Würfel haben keine gemeinsamen inneren Punkte. Wir betrachten alle derartigen Würfel Q_j , die O_m nicht-trivial schneiden und bemerken, dass es endlich viele Würfel sind. Ferner gilt

$$O_m \subset \cup Q_j \subset O.$$

Es folgt

$$\lambda(O_m) \leq \sum \lambda(Q_j) \leq \text{vol}^-(O).$$

Also erhalten wir die benötigte Ungleichung

$$\text{vol}^-(O) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(O_m) = \lambda(\cup_{m=1}^{\infty} O_m) = \lambda(O).$$

□

Aufgabe: Versuchen Sie die vielen Details des Beweises zu verstehen.

Aufgabe: Schauen Sie sich nochmal Kapitel 1.2 an, und machen Sie einen rigorosen Beweis der Aussage, dass die Fläche λ_2 der Teilmenge

unter dem Graphen einer stetigen Funktion durch das Riemannsche Integral ausgedrückt wird.

8. EINDEUTIGKEIT UND INVARIANZ UNTER ISOMETRIEN, TRANSFORMATIONSFORMEL I

8.1. Eindeutigkeit. Aufgabe: Machen Sie eine elementare Überlegung, die beweist, dass die Abbildung die einige Koordinaten des \mathbb{R}^n vertauscht (also durch eine Permutationsmatrix beschrieben wird) das Lebesgue-Maß jeder Teilmenge erhält.

Wir wollen nun die nicht sehr überraschende Aussage beweisen, dass sich das Lebesgue-Maß einer Teilmenge durch eine Bewegung nicht ändert. Eine Schwierigkeit, dies direkt zu beweisen, besteht darin, dass wir das Maß mit Hilfe von Quadern definiert haben, die achsenparallel sind. Die Achsenparallelität bleibt aber unter Bewegungen nicht unbedingt erhalten.

Der einfachste Weg führt über den folgenden wichtigen Satz:

SATZ 8.1. Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß auf der σ -Algebra der Borel-Mengen von \mathbb{R}^n . Sei $\mu(W) = 1$ für den Einheitswürfel $W = [0, 1]^n$. Wenn $\mu(A + x) = \mu(A)$ für jede Borel-Menge A und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, so ist μ das Lebesgue-Maß $\mu = \lambda$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren kleinen Schritten.

1. Sei W_k ein offener (wie immer achsenparalleler) Würfel der Seitenlänge $\frac{1}{k}$. Dann gilt

$$\mu(W^k) \leq \left(\frac{1}{k}\right)^n \leq \mu(\bar{W}^k).$$

Denn alle (offenen bzw. kompakten) Würfel gleicher Seitenlänge haben wegen der Translationsinvarianz gleiches μ -Maß. Man kann nun W durch k^n Translate von \bar{W}_k überdecken und k^n disjunkte Translate von W_k in W hineinlegen.

Ferner kann man \bar{W}_{2k} in W_k hineinlegen, also gilt $\mu(W_k) \geq \left(\frac{1}{2k}\right)^n$.

2. Für jeden rationalen Quader Q gilt $\mu(Q) \leq 2^n \lambda(Q)$.

Für Würfel mit Seitenlängen $\frac{1}{k}$ haben wir die Aussage bereits bewiesen. Für beliebige rationale kompakte Quader folgt die Aussage, indem man den Quader in kleine kompakte Würfel zerlegt. Für nicht-kompakte Quader folgt die Aussage, da $\lambda(Q) = \lambda(\bar{Q})$ gilt.

3. Für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\mu(A) \leq 2^n \cdot \lambda(A)$.

Dies ergibt sich aus (2), indem wir A durch rationale Quader, wie in der Definition von $\lambda(A)$ überdecken.

4. Ist $\lambda(A) = 0$, so gilt $\mu(A) = 0$. Dies folgt direkt aus 3.

5. Für jeden Quader Q gilt $\mu(Q) = \mu(\bar{Q})$.

Demn die Differenz $\bar{Q} \setminus Q$ ist eine λ -Nullmenge und wegen (4) eine μ -Nullmenge.

6. Es gilt $\mu(\bar{W}_k) = \mu(W_k) = \lambda(W_k)$ für alle natürlichen k .

Dies ergibt sich aus (5) und den Argumenten in (1).

7. Wie in (2) und (3) folgt nun $\mu(A) \leq \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

8. Ist $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ in W enthalten, so gilt $\mu(A) = \lambda(A)$.

Demn aus (7) folgern wir

$$1 = \mu(A) + \mu(W \setminus A) \leq \lambda(A) + \lambda(W \setminus A) = 1 .$$

9. Ist nun $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ beliebig, so schreiben wir A als eine disjunkte abzählbare Vereinigung von Borelteilmengen, die jeweils in einem Würfel mit Seitenlänge 1 enthalten sind. Dann folgt die Gleichheit $\mu(A) = \lambda(A)$ aus (8). \square

Die Eigenschaft $\mu(x + E) = \mu(E)$ für alle Borel-Mengen E nennen wir *Translationsinvarianz* des Maßes μ .

Korollar 8.2. *Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ ein translationsinvariantes Maß. Ist $\mu(W) = a < \infty$, so gilt für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Gleichheit*

$$\mu(A) = a \cdot \lambda(A) .$$

Beweis. Für $a = 0$ ergibt sich $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$, indem wir \mathbb{R}^n durch abzählbar viele Translate von W überdecken.

Für $a > 0$ wenden wir Satz 8.1 auf das Maß $\mu_a(B) := \frac{1}{a} \cdot \mu(B)$ an. \square

8.2. Transformationsformel. Der folgende Satz wird noch im Laufe der Vorlesung vielfach verallgemeinert werden.

SATZ 8.3. *Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann gilt für alle $E \subset \mathbb{R}^n$ die Gleichheit*

$$\lambda(T(E)) = |\det(T)| \cdot \lambda(E) .$$

Beweis. Sei zunächst T bijektiv. Dann ist T ein Homöomorphismus. In diesem Fall ist das Bild jeder offenen Teilmenge offen und das Bild jeder Borel-Menge ist eine Borel-Menge.

Wegen Proposition 7.3, (oder wegen Lemma 5.5) reicht es die Aussage für alle Borel-Mengen E zu beweisen.

Definiere $\mu_T : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$\mu_T(E) := \lambda(T(E)) .$$

Weil λ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und T ein Homöomorphismus ist, ist auch μ_T ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (warum?).

Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt wegen der Linearität von T die Gleichheit

$$\mu_T(E + x) = \lambda(T(E + x)) = \lambda(T(E) + T(x)) = \lambda(T(E)) = \mu_T(E) .$$

Ferner ist $\mu_T(K)$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ endlich (warum?).

Wegen Korollar 8.2 finden wir eine Konstante $a_T \in [0, \infty)$, so dass für jede Borel-Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ die folgende Gleichheit gilt

$$\lambda(T(E)) = a_T \cdot \lambda(E) .$$

Beachte, dass die Zahl a_T nur von T und nicht von der Teilmenge E abhängt!

Es bleibt zu zeigen, dass $a_T = |\det(T)|$ gilt. Dafür müssen wir $\lambda(E)$ und $\lambda(T(E))$ nur für eine einzige Teilmenge E vergleichen.

Für jede orthogonale Abbildung T , also eine Abbildung die die Normen von Vektoren erhält, gilt $T(B) = B$, für die offene Einheitskugel $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Weil $\lambda(B) \neq 0$, folgt also $a_T = 1$ für jede orthogonale Abbildung T .

Aus der Definition von a_T folgern wir für je zwei bijektive lineare S, T die Gleichheit

$$a_{ST} = a_S \cdot a_T .$$

Nun benutzen wir den folgenden *Satz über die Singulärwertzerlegung* aus der linearen Algebra (Aufgabe: erinnern Sie sich, oder lesen Sie nach, wie man diesen Satz beweist).

Lemma 8.4. *Für natürliche Zahlen m, n kann man jede Matrix $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ schreiben als $T = Q_1 \cdot D \cdot Q_2$, wobei Q_1 eine orthogonale $m \times m$ -Matrix, Q_2 eine orthogonale $n \times n$ -Matrix und in der Matrix D alle Einträge d_{ij} mit $i \neq j$ verschwinden und alle "Diagonaleinträge" d_{ii} nicht-negativ sind.*

In anderen Worten kann jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ als eine Komposition von zwei Bewegungen und einer Abbildung, die entlang der Koordinaten-Achsen streckt, dargestellt werden.

Sei nun $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige lineare Abbildung und sei $T = Q_1 \cdot D \cdot Q_2$ ihre Singulärwertzerlegung.

Dann gilt $a_T = a_{Q_1} \cdot a_D \cdot a_{Q_2} = a_D$ und $|\det(T)| = |\det(D)|$ (warum?). Damit reicht es die Aussage für eine Diagonalmatrix D zu beweisen.

Eine Diagonalmatrix D mit Diagonaleinträgen $d_1, \dots, d_n > 0$ bildet den Einheitswürfel W auf einen Quader $Q = D(W)$ mit Seitenlängen d_1, \dots, d_n ab. Also ist

$$a_D = (D(W)) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n = \det(D) = |\det(D)| .$$

Das beendet den Beweis im Fall des bijektiven T .

Ist T nicht bijektiv, so gilt $|\det(T)| = 0$. Andererseits ist $T(\mathbb{R}^n)$ in einer Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ enthalten. Die Hyperebene H ist das Bild $Q(H_0)$ einer achsenparallelen Hyperebene unter einer orthogonalen Abbildung Q (warum?).

Aus Lemma 5.3 und der bereits bewiesenen Aussage für die bijektive lineare Abbildung Q folgt

$$\lambda(T(\mathbb{R}^n)) \leq \lambda(H) = \lambda(H_0) = 0$$

und damit die Aussage für nicht bijektives T (warum?). Dies beendet den Beweis des Satzes. \square

Wir heben zwei im Beweis gezeigte Konsequenzen hervor. Die erste Aussage folgt aus der Translationsinvarianz und der gezeigten Aussage für lineare Hyperebenen (Zur Erinnerung: eine affine Hyperebene ist eine Teilmenge der Form $H + x$, wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und $H \subset \mathbb{R}^n$ eine lineare Hyperebene ist).

Korollar 8.5. *Ist $H \subset \mathbb{R}^n$ eine affine Hyperebene, so gilt $\lambda_n(H) = 0$.*

Die zweite Aussage folgt aus der gezeigten Invarianz des Lebesgue-Maßes unter orthogonalen Abbildungen und unter Translationen und der Aussage, dass jede Bewegung (=Isometrie) des Euklidischen Raumes \mathbb{R}^n auf sich eine Komposition einer orthogonalen Abbildung und einer Translation ist.

Korollar 8.6. *Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, so gilt für jede Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ die Gleichheit $\lambda(E) = \lambda(f(E))$.*

Aufgabe: Verstehen Sie die Details des Beweises. Ist mit λ das Maß oder das äußere Maß gemeint?

9. ANWENDUNGEN

9.1. Streckungen und Kugeln. Als erste und wichtigste Anwendung bemerken wir, dass wir unser erstes Ziel bis auf eine Kleinigkeit erfüllt haben und den Satz 2.6 bewiesen haben, bis auf die Aussage (3'), dass das Lebesgue-Maß unter einer 1-Lipschitz Abbildung nicht größer werden kann. Dies werden wir noch später zeigen.

Lemma 9.1. *Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, die alle Abstände um den Faktor $L > 0$ streckt, also $\|f(x) - f(y)\| = L \cdot \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\lambda(f(E)) = L^n \cdot \lambda(E)$ für alle $E \subset \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Betrachte die Abbildung $f_0(x) := L \cdot x$. Dann ist f_0 linear und nach der Transformationsformel gilt $\lambda(f_0(E)) = L^n \cdot \lambda(E)$ für alle $E \subset \mathbb{R}^n$ (warum?).

Die Abbildung $Q = f \circ f_0^{-1}$ erhält nach Annahme alle Abstände (warum?), ist also eine Isometrie und erhält das äußere Lebesgue-Maß jeder Teilmenge E . Indem wir $f = Q \circ f_0$ schreiben, folgt die Aussage für die Abbildung f aus der Aussage für die Abbildung f_0 . \square

Insbesondere gilt (Aufgabe: beweisen Sie die folgenden Aussagen):

Korollar 9.2. *Das Volumen jedes offenen Balles B mit Radius r in \mathbb{R}^n ist $\sigma_n \cdot r^n$, wobei $\sigma_n := \lambda_n(B_1(0))$ das Volumen des offenen Balles mit Radius 1 um 0 bezeichnet.*

Es gilt auch $\lambda(B) = \lambda(\bar{B})$ für jeden offenen Ball.

Im Fall $n = 1$ gilt $\sigma_1 = 2$ (warum?). Mit Hilfe des Riemannsches Integrals erhalten wir die aus der Schule bekannte Aussage $\sigma_2 = \pi$.

Aufgabe: Erinnern Sie sich an die dazugehörigen Rechnungen und machen Sie den Beweis rigoros!

Wir werden später eine induktive Formel für σ_n herleiten.

9.2. Parallelotop. Ein Parallelotop P im \mathbb{R}^n ist das Bild $f(W)$ des (abgeschlossenen) Einheitswürfels W unter einer affinen Abbildung $f(x) = v_0 + T(x)$, mit linearem T . Aus der Transformationsformel schließen wir für das Volumen des Parallelotops P

$$\lambda(P) = |\det(T)| .$$

Wir können W als die Menge aller Punkte x der Form

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i$$

mit $0 \leq \lambda_i \leq 1$ und Standard-Einheitsvektoren e_i beschreiben. Damit ist P die Menge der Punkte y der Form

$$y = v_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i ,$$

wobei $0 \leq \lambda_i \leq 1$. Hier bezeichnen wir mit v_i , für $i = 1, \dots, n$ die Spaltenvektoren von T , also die Bilder $v_i = T(e_i)$. Geometrisch sind v_i die Kanten des Parallelotops P (Aufgabe: Malen Sie ein Bild!).

9.3. Simplex. Ein Simplex S (=Dreieck, Tetraeder, ...) mit Ecken v_0, \dots, v_n in (allgemeiner Lage in) \mathbb{R}^n ist die Menge der Punkte x der Form

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot v_i \quad : \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \quad ; \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \lambda_i \in \mathbb{R} ,$$

die sogenannte konvexe Hülle der Ecken v_i .

Wir sehen, dass S die Form $S = f(S_0)$ hat, wobei f die affine Abbildung $f(x) = v_0 + T(x)$ bezeichnet. Hier ist S_0 der Simplex mit den Ecken $0, e_1, \dots, e_n$ und T ist die Matrix mit den Spalten $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0$. Nach der Transformationsformel ist

$$\lambda(S) = |\det(T)| \cdot \lambda(S_0) .$$

Um den Wert $\lambda(S_0)$ zu erhalten, kann man den Einheitswürfel in Simplex zerlegen. Wir werden später das folgende Lemma auf eine andere Weise zeigen:

Lemma 9.3. *In den obigen Bezeichnungen gilt $\lambda_n(S_0) = \frac{1}{n!}$.*

Aufgabe: Beweisen Sie die Aussage für $n = 1$ und $n = 2$. Versuchen Sie, sie für $n = 3$ zu beweisen.

10. DAS s -DIMENSIONALE HAUSDORFF-MASS

10.1. Formulierung. Unser nächstes Ziel ist ein anderer Zugang zum Lebesgue-Maß, der ohne die spezielle Rolle der Quader auskommt, uns neue Einsichten über das Lebesgue-Maß erlaubt und zu Oberflächen-Maßen und fraktalen Objekten führt. Wir werden den folgenden Satz beweisen und das dort postulierte Maß konstruieren. Die Konstruktion ist letztlich weniger bedeutend als die Aussage selbst.

SATZ 10.1. *Sei $s \geq 0$ eine reelle Zahl. Dann existiert ein äußeres Maß $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, genannt das s -dimensionale Hausdorff-Maß, mit folgenden Eigenschaften.*

- (1) *Alle Borel-Mengen sind \mathcal{H}^s -messbar.*
- (2) *Sei $s = m \leq n$ eine natürliche Zahl. Dann gilt für jede Borel-Menge $E \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ die Gleichheit $\mathcal{H}^m(E) = \lambda_m(E)$.*
- (3) *Sei $L > 0$, sei E eine Teilmenge von \mathbb{R}^n und $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine L -Lipschitz Abbildung. Dann gilt*

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq L^s \cdot \mathcal{H}^s(E) .$$

- (4) *Gilt für eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$, dass $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, so gilt für alle $r > s$ die Gleichheit $\mathcal{H}^r(E) = 0$.*

Bevor wir mit der Konstruktion beginnen besprechen wir einige weitere Eigenschaften, die aus den in Satz 10.1 geforderten folgen. Zunächst folgt aus der Eigenschaft (2) für $m = n = s$ und der Eigenschaft (3), dass das Lebesgue-Maß einer Teilmenge unter 1-Lipschitz Abbildungen nicht vergrößert wird, also die letzte bislang unbewiesene Eigenschaft (3') in Kapitel 1.5.

10.2. Weitere Eigenschaften. Wie für das Lebesgue-Maß folgt aus der Eigenschaft (3) und der Tatsache, dass eine Isometrie und ihr Inverses 1-Lipschitz sind das folgende:

Korollar 10.2. *Das äußere Maß \mathcal{H}^s wird erhalten unter Isometrien $f : E \rightarrow f(E) \subset \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist es invariant unter Translationen und Drehungen.*

Aufgabe: Verifiziere die Details.

Korollar 10.3. *Ist $V \subset \mathbb{R}^n$ ein k -dimensionaler affiner Unterraum, so gilt $\mathcal{H}^s(V) = 0$ für alle $s > k$.*

Beweis. Das obige Korollar reduziert durch eine Drehung die Aussage auf den Fall $V = \mathbb{R}^k$. Für jeden Quader Q in \mathbb{R}^k ist $\mathcal{H}^k(Q)$ endlich wegen der Eigenschaft (2), also $\mathcal{H}^s(Q) = 0$ wegen (4). Da \mathbb{R}^k eine abzählbare Vereinigung von Würfeln ist, gilt $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^k) = 0$. \square

Die folgende Aussage ist auch für das Lebesgue-Maß $\lambda_n = \mathcal{H}^n$ neu:

Korollar 10.4. *Ist $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 Abbildung, so gilt für jedes $s > k$ die Gleichheit*

$$\mathcal{H}^s(f(U)) = 0 .$$

Beweis. Wir schreiben U als eine abzählbare Vereinigung offener Würfel Q , für die $\bar{Q} \subset U$ gilt (Aufgabe: Erinnern Sie sich, wie es geht.)

Es reicht zu beweisen, dass $\mathcal{H}^s(f(Q)) = 0$, für jedes solche Q ist. Nun ist $\mathcal{H}^s(Q) = 0$ wegen der obigen Folgerung. Also folgt die Aussage aus (3), sobald wir wissen, dass $f : Q \rightarrow f(Q)$ eine L -Lipschitz Abbildung mit irgendeiner Konstante L ist.

Dies ist aber eine Konsequenz aus dem Schrankensatz der Differentialrechnung, wobei L das Maximum der Supremumsnormen der Ableitungen $D_x f, x \in \bar{Q}$ bezeichnet. \square

Aufgabe: Erinnern Sie sich an den Schrankensatz und verifizieren Sie, dass wir ihn korrekt angewendet haben.

Aufgabe: Lesen Sie nach, was eine Peano-Kurve ist, wundern Sie sich, und verstehen Sie, was der Unterschied zum letzten Korollar ausmacht.

10.3. Hausdorff-Dimension und Fraktale. Dieses Kapitel ist für den Rest der Vorlesung nicht relevant.

Die in der nächsten Folgerung definierte Zahl $s_0(E)$ heißt die Hausdorff-Dimension einer Teilmenge E .

Korollar 10.5. *Für jede Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ betrachte*

$$s_0(E) := \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\} .$$

Dann gilt $s_0(E) \leq n$. Für alle $s > s_0$ gilt $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Für alle $s < s_0$ gilt $\mathcal{H}^s(E) = \infty$.

Es gibt also für jede Teilmenge E höchstens eine Zahl s , für die das entsprechende Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^s(E)$ "nicht trivial" ist. Ist diese Zahl s keine ganze Zahl, so spricht man von einer fraktalen Menge E .

Ein Würfel im \mathbb{R}^n besteht (für jedes natürliche k) aus k^n "fast disjunkten" Würfeln, jeder von denen um den Faktor k kleiner als der ursprüngliche Würfel ist (wie ist es gemeint?). Es liegt nahe, einen Begriff der Dimension entsprechend zu definieren. Tatsächlich erhält man für viele "interessante" Beispiele so den Wert der Hausdorff-Dimension, wie wir jetzt (fast) sehen werden.

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei s eine Zahl, so dass $0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty$. Sei $1 < L$ eine reelle Zahl. Wir nehmen an, dass C in Teilmengen E_1, \dots, E_k zerlegt werden kann, so dass $\mathcal{H}^s(E_i \cap E_j) = 0$ für $i \neq j$ gilt. Wir nehmen letztlich an, dass jedes E_i isometrisch zu $\frac{1}{L} \cdot C$ ist.

Aufgabe: Geben sie eine solche Zerlegung für den Einheitswürfel $C = W \subset \mathbb{R}^n$, $L = 2$ und $s = n$ an. Was ist dabei k ?

Aufgabe: Geben Sie eine solche natürliche Zerlegung für die Standard Cantor-Menge an. Dabei sollte die Bedingung $\mathcal{H}^s(E_i \cap E_j) = 0$ durch die Bedingung $E_i \cap E_j = \emptyset$ ersetzt werden. Bestimmen Sie k und L . Die "Dimension" s erhalten wir gleich.

Dann erhalten wir

$$\mathcal{H}^s(C) = \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^s(E_i) = k \cdot \left(\frac{1}{L}\right)^s \cdot \mathcal{H}^s(C).$$

Wir folgern also $k = L^s$ und

$$s = \frac{\log k}{\log L}.$$

Aufgabe: Folgern Sie für die Standard Cantor-Menge C , unter der Annahme, dass es ein s mit $0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty$ gibt, dass $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ gelten muss.

Aufgabe: Schauen Sie sich Bilder von fraktalen Mengen, wie der Koch-Schneeflocke und dem Serpinski-Teppich im Internet an. Verstehen Sie wie oben, welche Hausdorff-Dimensionen sie haben sollten.

11. KONSTRUKTION DER HAUSDORFF-MASSE

11.1. Vorbereitung. Wir bezeichnen mit $\text{diam}(A)$ den Durchmesser einer Teilmenge A in \mathbb{R}^n . Wir notieren für später, dass für den Einheitswürfel W und den Einheitsball B die Gleichungen $\text{diam}(W) = \sqrt{n}$ und $\text{diam}(B) = 2$ gelten.

Wir halten im Folgenden eine Zahl $s > 0$ und die Dimension n fest. Für $0 < \epsilon \leq \infty$ sei \mathcal{E}_ϵ die Menge aller Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\text{diam}(A) \leq \epsilon$. Insbesondere, $\mathcal{E}_\infty = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{E}_{r_1} \subset \mathcal{E}_{r_2}$ für $r_1 \leq r_2$.

Wir wenden nun Lemma 4.2 auf die Abbildung $\nu : \mathcal{E}_\epsilon \rightarrow [0, \infty]$ gegeben durch $\nu(A) := \text{diam}(A)^s$ an, um für jedes ϵ das äußere Maß

$$(11.1) \quad h_\epsilon^s(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}^s(A_i) : E \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i ; \text{diam}(A_i) \leq \epsilon \right\}$$

zu erhalten.

Nun erhalten wir schrittweise folgende Eigenschaften:

1. Für $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$ und jede Teilmenge E folgt aus $\mathcal{E}_{\epsilon_1} \subset \mathcal{E}_{\epsilon_2}$

$$h_{\epsilon_1}^s(E) \geq h_{\epsilon_2}^s(E) .$$

2. Da der Durchmesser invariant unter Isometrien von \mathbb{R}^n ist, ist auch jedes h_ϵ^s invariant unter Isometrien, insbesondere unter Translationen.

3. Man kann sich in der Formel (11.1) auf Teilmengen $A_i \subset E$ einschränken.

4. Ist $f : E \rightarrow F$ eine L -Lipschitz Abbildung, so gilt für jede Teilmenge $A \subset E$ die Ungleichung $\text{diam}(f(A)) \leq L \cdot \text{diam}(A)$. Es folgt direkt:

$$(11.2) \quad h_{L \cdot \epsilon}^s(f(E)) \leq L^s \cdot h_\epsilon^s(E) .$$

5. Für $r \geq s$, für alle ϵ und alle E gilt

$$(11.3) \quad h_\epsilon^r(E) \leq \epsilon^{r-s} \cdot h_\epsilon^s(E)$$

Aufgabe: Verifizieren Sie alle Details der obigen Aussagen.

11.2. Grenzwert. Um die Messbarkeit der Borelmengen, wie für das Lebesgue-Maß zeigen zu können, müssen wir Überdeckungen mit immer kleiner werdenden Objekten betrachten, siehe den Beweis von Lemma 5.7. In der Tat gibt es für feste positive ϵ kaum h_ϵ^s -messbare Mengen. Die Situation ändert sich für das folgende Grenzobjekt. Wir setzen

$$\hat{\mathcal{H}}^s(E) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon^s(E) .$$

Der Grenzwert existiert wegen der Monotonie (1). Es folgt auch, dass $\hat{\mathcal{H}}^s$ ein äußeres Maß ist (Aufgabe: bestätige dies!). Die Invarianz unter Isometrien (2) bleibt unter Grenzübergang erhalten.

Aus der Eigenschaft (4) folgt in den dortigen Bezeichnungen

$$\hat{\mathcal{H}}^s(f(E)) \leq L^s \cdot \hat{\mathcal{H}}^s(E) .$$

Aus der Eigenschaft (5) ergibt sich, für $\epsilon \rightarrow 0$, dass für feste $r > s$ und jedes $E \subset \mathbb{R}^n$ die Annahme $\hat{\mathcal{H}}^s(E) < \infty$ die Folgerung $\hat{\mathcal{H}}^r(E) = 0$ nach sich zieht.

Seien $E, F \subset \mathbb{R}^n$ mit $d(E, F) > \epsilon > 0$ gegeben. Genauso wie in Lemma 5.7 folgt die Aussage $h_\epsilon^s(E \cup F) = h_\epsilon^s(E) + h_\epsilon^s(F)$. Daraus schließen wir

$$\hat{\mathcal{H}}^s(E \cup F) = \hat{\mathcal{H}}^s(E) + \hat{\mathcal{H}}^s(F) .$$

Mit dem Kriterium von Caratheodery folgern wir, dass alle Borel-Mengen $\hat{\mathcal{H}}^s$ -messbar sind.

Wir brauchen noch das folgende

Lemma 11.1. *Sei $W \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ der m -dimensionale Einheitswürfel. Dann gilt*

$$0 < \hat{\mathcal{H}}^m(W) < \infty .$$

Beweis. Wir können W , für jedes natürliche k durch k^m Würfel mit Seitenlänge $\frac{1}{k}$ und damit Durchmesser $\frac{\sqrt{m}}{k}$ überdecken.

Für $\epsilon \leq \frac{\sqrt{m}}{k}$ folgern wir

$$h_\epsilon^m(W) \leq k^m \cdot \left(\frac{\sqrt{m}}{k}\right)^m \leq (\sqrt{m})^m .$$

Damit ergibt sich auch $\hat{\mathcal{H}}^m(W) \leq (\sqrt{m})^m$.

Sei andererseits $W \subset \cup A_i$. Sei B_i eine abgeschlossene Kugel mit Zentrum in einem Punkt von A_i und Radius $\text{diam}(A_i)$. Dann gilt $A_i \subset B_i$ und $\text{diam}(B_i) \leq 2 \cdot \text{diam}(A_i)$. (Warum gilt es?).

Wir folgern unter Benutzung der Formel für das Volumen einer Kugel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}^m(A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_m} \cdot \lambda_m(B_i) \geq \frac{1}{\sigma_m} \cdot \lambda_m(W) = \frac{1}{\sigma_m} .$$

Also ergibt sich $\hat{\mathcal{H}}^m(W) \geq \frac{1}{\sigma_m}$. □

Aufgabe: Verstehen Sie die Details der obigen Argumentation.

Bis auf eine Normierung haben wir bereits die Hausdorff-Maße konstruiert:

Beweis. [Beweis von Satz 10.1] Wir wählen Normierungskonstanten wie folgt. Für jede Zahl s , die keine natürliche Zahl ist, setzen wir $\gamma_s \in (0, \infty)$ beliebig, z.B. $\gamma_s = 1$. Für jede natürliche Zahl $s = m$ setzen wir

$$\gamma_s := \frac{1}{\hat{\mathcal{H}}^m(W)}$$

wobei W der Einheitswürfel in \mathbb{R}^m ist. Nach Lemma 11.1, ist γ_m wohldefiniert.

Setzen wir nun $\mathcal{H}^s(E) := \gamma_s \cdot \hat{\mathcal{H}}^s(E)$. Aus den entsprechenden Eigenschaften von $\hat{\mathcal{H}}^s$ folgen direkt Aussagen (1), (3), (4).

Auf den Borel-Mengen $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ ist \mathcal{H}^m ein translationsinvariantes Maß, das wegen der Wahl von γ_m die Eigenschaft $\mathcal{H}^m(W) = 1$ hat. Die Aussage (2) ist nun eine direkte Folgerung von Satz 8.1. \square

Integration

12. MESSBARE ABBILDUNGEN, EINFACHE FUNKTIONEN

12.1. **Ziel.** So wie wir in der Maßtheorie möglichst allgemeine Teilmengen messen wollten, so wollen wir möglichst allgemeine Funktionen integrieren. Das primäre Ziel ist eine Klasse von Funktionen zu erhalten, denen wir eine Zahl, das (Lebesgue-) Integral dieser Funktion zuordnen können, so dass folgende fundamentale Eigenschaften gelten.

Die Klasse enthält alle stetigen Funktionen, die außerhalb einer kompakten Teilmenge verschwinden; und auf dieser Klasse stimmt der Integralbegriff mit dem Riemann-Integral aus Analysis I überein. Die Klasse der Funktionen ist invariant unter den üblichen Operationen und Grenzwertübergängen. Das Integral soll linear von den Funktionen abhängen und sich mit Grenzübergängen vertragen.

Wir konstruieren die Klasse der Funktionen und das Integral nicht nur für das Lebesgue-Maß, sondern für allgemeine Maße.

12.2. **Messbare Abbildungen.** Seien X, Y zwei Mengen mit σ -Algebren $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ -messbar, wenn für alle $E \in \mathcal{B}$ das Urbild $f^{-1}(E) \subset X$ in \mathcal{A} liegt.

Ergibt es sich aus dem Kontext, welche σ -Algebra auf Y bzw. X , bzw. auf beiden Räumen gemeint ist, so sprechen wir von \mathcal{A} -messbaren, bzw. \mathcal{B} -messbaren, bzw. von messbaren Abbildungen. Ist der Bildraum \mathbb{R} oder \mathbb{R}^k , so wird der Bildraum, wenn nicht anders betont, mit der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ versehen.

Ist $\mathbb{R}^n = X$ der Definitionsbereich von f , so wird falls nicht anders betont, \mathbb{R}^n mit der σ -Algebra \mathcal{M}_λ der Lebesgue-messbaren Teilmengen versehen, also der bzgl. des äußeren Lebesgue-Maßes λ messbaren Teilmengen.

Hier ist eine lange Liste von Beispielen (verifizieren Sie!):

1. Nach Lemma 2.4 ist jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei metrischen Räumen messbar, wenn X und Y mit der σ -Algebra der Borel-Mengen versehen werden.

2. Ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ oder ist $\mathcal{B} = \{\emptyset, Y\}$ so ist jedes $f : X \rightarrow Y$ eine $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ -messbare Abbildung.

3. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ -messbare und ist $g : Y \rightarrow Z$ eine $\mathcal{B} - \mathcal{C}$ -messbare Abbildung, so ist die Komposition $g \circ f$ eine $\mathcal{A} - \mathcal{C}$ -messbare Abbildung.

4. Für beliebige σ -Algebren \mathcal{A}, \mathcal{B} auf Mengen X und Y ist eine konstante Abbildung $f : X \rightarrow Y$, die alle $x \in X$ auf einen Punkt $y_0 \in Y$ schickt $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ -messbar.

5. Der Beweis von Lemma 2.4 zeigt Folgendes. Seien X und Y zwei Mengen mit σ -Algebren \mathcal{A} und \mathcal{B} . Sei $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$ erzeugt als σ -Algebra von einer Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$. Dann ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ messbar genau dann, wenn $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ für jede Menge $O \in \mathcal{E}$ gilt.

Für eine Menge $E \subset X$ sei $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion $\chi_E(x) = 1$ für $x \in E$ und $\chi_E(x) = 0$ für $x \in E^c = X \setminus E$.

Wird \mathbb{R} wie üblich mit der Borel-Algebra versehen, so gilt für jede σ -Algebra \mathcal{A} auf X die folgende Aussage (Aufgabe: beweisen Sie es!):

6. Die Funktion $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist \mathcal{A} -messbar genau dann, wenn $E \in \mathcal{A}$.

Insbesondere, gibt es ganz viele Lebesgue-messbare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die nicht stetig sind. (Aufgabe: messbar bezüglich welcher Algebren? Was sind diese vielen Funktionen?).

Die Idee, eine Menge $E \subset X$ mit ihrer charakteristischen Funktion χ_E zu "identifizieren", ist in Analysis sehr wichtig. Wir lassen uns von dieser Identifizierung leiten und nennen eine Teilmenge $E \subset X$ messbar, wenn die Funktion χ_E messbar ist, d.h., wenn E in der σ -Algebra \mathcal{A} enthalten ist. Dies sollte nicht zu Verwirrungen führen und ist mit Sprachgebrauch aus Kapitel 6 kompatibel.

12.3. Messbare Funktionen. Nun konzentrieren wir uns auf den Fall von Abbildungen nach \mathbb{R} , die wir immer Funktionen nennen werden.

Lemma 12.1. *Seien \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X und seien \mathbb{R} und \mathbb{R}^k mit den Borel-Algebren versehen. Eine Abbildung $F = (f_1, \dots, f_k) : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist messbar genau dann, wenn jedes f_i messbar ist.*

Eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist messbar genau dann, wenn für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge

$$f^{<a} := \{x \in X \mid f(x) < a\}$$

in \mathcal{A} enthalten ist.

Beweis. Um die zweite Aussage zu beweisen, benutzen wir Beispiel (5) oben und die Aussage, dass die Menge $\mathcal{E} = \{(-\infty, a]\}$ der Strahlen die Borel-Algebra in \mathbb{R} erzeugt. (Aufgabe: Warum tut sie das?).

Um die erste Aussage zu zeigen, bemerken wir, dass $f_i = P_i \circ F$ gilt, wobei $P_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die i -te Koordinate bezeichnet. Da P_i stetig ist, folgt aus der Messbarkeit von F die Messbarkeit von f_i mit den Beispielen (1) und (3).

Sei andererseits jedes f_i messbar. Nach Beispiel (5) und Lemma 2.3 reicht es zu zeigen, dass $F^{-1}(Q) \in \mathcal{A}$, wobei $Q = I_1 \times \dots \times I_k$ mit

Intervallen I_j . Nun ist aber

$$F^{-1}(Q) = \bigcap_{j=1}^k f_j^{-1}(I_j) .$$

Also folgt aus der Messbarkeit der f_i die Messbarkeit von F . \square

Als Folgerung erhalten wir:

Korollar 12.2. *Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, so sind auch die folgenden Funktionen auf X messbar:*

$f+g$; $f \cdot g$; $\max\{f, g\}$; $\min\{f, g\}$; $f^+ := \max\{f, 0\}$; $f^- := -\min\{f, 0\}$.

Ferner ist $|f|$ und für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $c \cdot f$ messbar. Ist letztlich f nirgends 0, so ist die Funktion $\frac{1}{f}$ messbar.

Beweis. Nach Lemma 12.1 ist $F := (f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ messbar. Die Funktion $f \cdot g$ ist die Komposition von F und der stetigen Abbildung $\cdot : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Aus Beispiel (3) ergibt sich die Messbarkeit von $f \cdot g$.

Alle anderen Aussagen folgen analog. (Aufgabe: Folgern Sie die anderen Aussagen!). \square

Die Klasse der messbaren Funktionen ist auch viel stabiler als die Klasse der stetigen Funktionen unter Grenzwertbildungen:

Proposition 12.3. *Sei $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von \mathcal{A} -messbaren Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f eine \mathcal{A} -messbare Funktion.*

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt für die Menge $f^{<a}$ aus Lemma 12.1 die Gleichheit:

$$f^{<a} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{m=n}^{\infty} f_m^{<a - \frac{1}{k}} \right) \right) .$$

(In Worten: $f(x) < a$ genau dann, wenn es natürliche Zahlen k, m gibt, so dass für alle $n \geq m$ die Ungleichheit $f_n(x) < a - \frac{1}{k}$ gilt).

Also folgt aus der Messbarkeit aller f_n , dass $f^{<a}$ in der σ -Algebra enthalten ist. \square

12.4. Einfache Funktionen. Wegen Korollar 12.2 ist die Menge der messbaren Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (wie vorher, für eine feste σ -Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$) ein Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren jetzt einen wichtigen Untervektorraum $\mathcal{E}(X)$ der sogenannten einfachen Funktionen, die man sich als Verallgemeinerungen der Treppenfunktionen aus Analysis I vorstellen sollte.

Definition 12.4. *Eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt einfach, wenn die Bildmenge $f(X)$ endlich ist. Die Menge aller einfachen Funktionen auf X bezeichnen wir mit $\mathcal{E}(X)$.*

Wir sehen mit Korollar 12.2, dass $\mathcal{E}(X)$ ein Vektorraum ist und dass ein (punktweises) Produkt von zwei einfachen Funktionen wieder eine einfache Funktion ist.

Ist $f \in \mathcal{E}(X)$ und gilt $f(X) = \{a_1, \dots, a_m\}$, so sind die Mengen $A_i = f^{-1}(a_i)$ disjunkt und in der σ -Algebra \mathcal{A} enthalten. In diesen Bezeichnungen gilt:

$$f = \sum_{i=1}^m a_i \cdot \chi_{A_i}.$$

Insbesondere, ist $\mathcal{E}(X)$ der kleinste Vektorraum, der alle charakteristische Funktionen χ_E der Mengen $E \in \mathcal{A}$ enthält.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Funktionen $\chi_E, E \in \mathcal{A}$ keine Basis von $\mathcal{E}(X)$ bilden müssen.

Aufgabe: Erinnern Sie sich, was Treppenfunktionen auf \mathbb{R} sind. Verifizieren Sie, dass Treppenfunktionen einfache Funktionen sind (bezüglich welcher σ -Algebren?) und dass es einfache Funktionen gibt, die keine Treppenfunktionen sind.

12.5. Approximation von messbaren Funktionen durch einfache Funktionen. Der folgende Satz zeigt, dass der Vektorraum der messbaren Funktionen der kleinste unter punktweisen Grenzwerten abgeschlossene Vektorraum von Funktionen ist, der alle messbaren charakteristischen Funktionen enthält.

SATZ 12.5. *Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt*

- (1) *Es gibt einfache Funktionen f_i die gegen f punktweise konvergieren.*
- (2) *Ist $f \geq 0$, so können alle f_i positiv gewählt werden, so dass*

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \dots$$

- (3) *Ist f beschränkt, so können alle f_i beschränkt gewählt werden, so dass die Konvergenz $f_i \rightarrow f$ gleichmäßig ist.*

Beweis. Für (a) und (c) gehen wir wie folgt vor. Wir unterteilen das Intervall $[-n, n]$ in halboffene Intervalle der Länge $\frac{1}{n}$ (machen Sie ein Bild!).

Wir setzen $f_n(x) = 0$, falls $f(x) > n$ oder $f(x) < -n$ gilt.

Gilt $f(x) \in [-n, n]$, so setzen wir $f_n(x)$ als das linke Ende $\frac{k}{n}$ des Intervalls in dem $f(x)$ liegt.

Nach Konstruktion gilt $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$, falls $|f(x)| \leq n$. Ferner, nimmt f_n nur endlich viele Werte an (welche?). Ferner ist das Urbild jedes solcher Wertes a_k messbar (d.h. ein Element der σ -Algebra), weil es das Urbild eines Intervalls unter der Abbildung f ist.

Daraus ergibt sich direkt (1) und (3). Um (2) zu erreichen, kann man f_i durch f_i^+ ersetzen und dadurch $f_i \geq 0$ erreichen. Anschließend ersetzen wir f_i durch $\max_{j \leq i} f_j$. \square

Aufgabe: Füllen Sie alle Details des Beweises!

13. DAS INTEGRAL

13.1. Integral nicht-negativer Funktionen. Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Das Integral soll eine Abbildung sein, $\int : \mathcal{M}^+(X) \rightarrow [0, \infty]$, die jeder messbaren nicht-negativen Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty)$ eine Zahl $\int f = \int_X f d\mu \in [0, \infty]$ zuordnet.

Denkt man an das Riemannsches Integral, so erscheint es natürlich, einer charakteristischen Funktion χ_E als Integral $\int \chi_E$ den Wert $\mu(E)$ zuzuordnen. (Später werden wir eine andere "Erklärung" für diese Festlegung finden).

Der folgende Satz zeigt, dass dies und zwei weitere natürliche Eigenschaften das Integral eindeutig festlegen. Im Folgenden benutzen wir die Konvention $0 \cdot \infty = 0$.

SATZ 13.1. Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Sei $\mathcal{M}^+(X)$ der Raum der \mathcal{A} -messbaren nicht-negativen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Es gibt genau eine Abbildung $\int : \mathcal{M}^+(X) \rightarrow [0, \infty]$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

- (1) Für jedes $E \in \mathcal{A}$ gilt $\int \chi_E = \mu(E)$.
- (2) Für $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$ und $a, b \in [0, \infty)$ gilt

$$\int (a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \int f + b \cdot \int g.$$

- (3) Konvergieren $f_i \in \mathcal{M}^+(X)$ mit $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \dots$ punktweise gegen f , so gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i = \int f.$$

Beweis. Aus (1) und (2) folgt, dass das Integral $\int f$ für jede einfache Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty)$ eindeutig bestimmt ist. Aus Satz 12.5 folgt mit (3), dass der Wert des Integrals auf allen einfachen Funktionen in $\mathcal{M}^+(X)$ den Wert $\int f$ für alle $f \in \mathcal{M}^+(X)$ bestimmt. Damit folgt die Eindeutigkeit des Integrals. (Aufgabe: Füllen Sie die Details der Argumente).

Um die Existenz zu zeigen, folgen wir dem Beweis der Eindeutigkeit. Zunächst schreiben wir jede einfache Funktion $f \in \mathcal{M}^+(X)$ eindeutig als $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ mit verschiedenen a_i und nicht-leeren $A_i = f^{-1}(a_i)$.

Dann setzen wir $\int f$ als den einzigen in Frage kommenden Wert, der (1) und (2) erfüllen kann:

$$\int f := \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mu(A_i) \in [0, \infty].$$

Nun sehen wir, dass für jede andere Darstellung $f = \sum_{i=1}^m b_i \cdot \chi_{E_i}$ mit beliebigen *disjunkten* E_i , die Gleichheit

$$\int f = \sum_{i=1}^m b_i \cdot \mu(E_i)$$

gilt. (Aufgabe: warum?).

Sind nun $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$ einfache Funktionen, so finden wir endlich viele disjunkte Teilmengen $C_i \in \mathcal{A}$, so dass

$$f = \sum a_i \cdot \chi_{C_i} \text{ und } g = \sum b_i \cdot \chi_{C_i}.$$

In diesem Fall ist $f + g = \sum (a_i + b_i) \cdot \chi_{C_i}$ und es folgt

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

Als Konsequenz sehen wir, dass für einfache $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$ aus $f \leq g$ die Ungleichung $\int f \leq \int g$ folgt (Warum?).

Sei nun $f \in \mathcal{M}^+(X)$ beliebig. Wir setzen

$$\int f := \sup \left\{ \int f^* \right\},$$

wobei f^* über alle einfachen $0 \leq f^* \leq f$ läuft.

Aus der oben gezeigten Monotonie ergibt sich, dass für einfache $f \in \mathcal{M}^+(X)$ die neue Definition des Integrals mit der alten übereinstimmt. Insbesondere ist die Bedingung (1) erfüllt.

Dieselbe Monotonie für einfache Funktionen zeigt auch, dass für $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$ aus $f \geq g$ die Ungleichung $\int f \geq \int g$ folgt.

Es gilt $\int a \cdot f = a \cdot \int f$ für alle nicht-negativen $a \in \mathbb{R}$ und alle $f \in \mathcal{M}^+(X)$. Ferner folgt in (2) die Ungleichung \geq aus der Definition, der Gleichheit in (2) für einfache Funktionen und der Tatsache, dass für einfache Funktionen $f^* \leq f$ und $g^* \leq g$ die Funktion $f^* + g^*$ einfach und kleiner gleich $f + g$ ist.

Nun zeigen wir (3). Die Ungleichung \leq folgt aus der Monotonie des Integrals. Wählt man einfache Funktionen $f^* \leq f$ beliebig und ersetzt f_i durch $\min\{f_i, f^*\}$, so reduziert man die Aussage auf den Fall, dass f eine einfache Funktion ist (Aufgabe: Wie genau funktioniert es?).

Schreibt man $f = \sum a_j \cdot \chi_{A_j}$ mit disjunkten A_j und ersetzt f_i durch $f_i^j := f_i \cdot \chi_{A_j}$, so reduziert man die Aussage auf den Fall $f = a_j \cdot \chi_{A_j}$.

Division durch a_j reduziert die Behauptung ferner auf den Fall $f = \chi_E$ für eine Menge $E \in \mathcal{A}$.

Wähle nun ein beliebiges $\epsilon > 0$. Betrachte die Menge E_i^ϵ aller $x \in E$ mit $f_i(x) \geq 1 - \epsilon$. Dann ist E_i^ϵ eine aufsteigende Folge mit $\cup E_i^\epsilon = E$ (warum?). Also ist $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i^\epsilon) = \mu(E)$. Ferner ist nach Definition von E_i^ϵ , die Ungleichung $f_i \geq (1 - \epsilon) \cdot \chi_{E_i^\epsilon}$ und damit $\int f_i \geq (1 - \epsilon) \cdot \mu(E_i^\epsilon)$ erfüllt. Wir folgern

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i \geq (1 - \epsilon) \cdot \mu(E) .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt $\int f_i \rightarrow \int f$. Damit ist die Aussage (3) bewiesen.

Nun folgt (2) aus (3), Satz 12.5 und der Aussage (2) für einfache Funktionen. \square

Schwierige Aufgabe: Versuchen Sie den ganzen obigen Beweis zu verstehen.

Der besonders aufwändige Teil des obigen Satzes, nämlich die Aussage (3) trägt den Namen "Konvergenzsatz von Beppo Levi".

Wir notieren die wichtige im obigen Beweis gezeigte Monotonie:

Korollar 13.2. *Für Funktionen $f \geq g$ in $\mathcal{M}^+(X)$ gilt $\int f \geq \int g$.*

13.2. Integrierbare Funktionen. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) heißt (auf X bezüglich μ) integrierbar, wenn sie messbar ist und $\int f^+ < \infty$ und $\int f^- < \infty$ gilt; siehe Korollar 12.2 für die Definitionen von f^\pm . In diesem Fall setzen wir

$$\int f := \int f^+ - \int f^-$$

und nennen es das Integral von f . Die Menge der integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Zunächst haben wir folgende Integrierbarkeitskriterien:

Lemma 13.3. *Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann sind äquivalent:*

- (1) f ist integrierbar.
- (2) $|f|$ ist integrierbar.
- (3) $\int |f| < \infty$.
- (4) Es gibt ein $g \in \mathcal{L}^1$ mit $|g| \geq |f|$.

Beweis. (2) und (3) sind äquivalent nach Definition. Da $f^+, f^- \leq |f|$ folgt aus (2) die Aussage (1) mit Korollar 13.2. Aus (1) folgt mit der Linearität $\int |f| = \int f^+ + \int f^- < \infty$ und damit (3).

Aus (3) folgt (4) mit $g = f$. Andererseits folgt aus (4) die Aussage (3) mit der Monotonie. \square

Nun folgern wir leicht:

SATZ 13.4. Die Menge \mathcal{L}^1 ist ein Vektorraum von Funktionen und $f \rightarrow \int f$ ist eine lineare Abbildung $\int : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathbb{R}$.

Es gilt $\int f \geq \int g$ falls $f \geq g$ für $f, g \in \mathcal{L}^1$. Letztlich gilt für $f \in \mathcal{L}^1$ die Ungleichung $\int |f| \geq |\int f|$.

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{L}^1$. Dann gilt $|a \cdot f + b \cdot g| \leq (|a| + |b|)(|f| + |g|)$. Das Integral der rechten Seite ist endlich und damit ist $a \cdot f + b \cdot g \in \mathcal{L}^1$. Also ist \mathcal{L}^1 ein Vektorraum.

Es gilt $(a \cdot f)^\pm = a \cdot f^\pm$ für $a \in [0, \infty)$ und damit folgt $\int a \cdot f = a \cdot \int f$. Genauso schließt man $\int(-f) = -\int f$.

Damit bleibt für den Beweis der Linearität, für $f, g \in \mathcal{L}^1$ die Gleichheit

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

zu verifizieren. Nach Definition des Integrals und Satz 13.1 müssen wir nur

$$\int (f + g)^+ - \int (f + g)^- = \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-)$$

beweisen. Dies folgt mit nochmaligem Anwenden von Satz 13.1 aus $(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$.

Die Monotonie folgt aus der Linearität und $\int f \geq 0$ für $f \geq 0$.

Die letzte Ungleichung ergibt sich aus der Monotonie und den Ungleichungen $|f| \geq f$ und $|f| \geq -f$. \square

13.3. Reihen als Integral. Sei $X = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, sei $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und μ sei das Zählmaß, gegeben durch $\mu(E) := \#E$, die Anzahl der Elemente in E .

Jede Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, die wir als Folge $f(n)$ schreiben, ist μ -messbar. Ist $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ gegeben, so ist f der aufsteigende punktweise Grenzwert der Folge $f_i \in \mathcal{M}^+(\mathbb{N})$ der einfachen Funktionen gegeben durch $f_i(m) = f(m)$ für $m \leq i$ und $f_i(m) = 0$ sonst.

Wir sehen $f_i = \sum_{j=1}^i f(j) \cdot \chi_{\{j\}}$ und damit

$$\int f_i d\mu = \sum_{j=1}^i f(j).$$

Nach dem Satz von Beppo Levi folgt

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(i).$$

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mu)$ genau dann, wenn die Reihe $\sum f(i)$ absolut konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \left(\sum_{f(i) \geq 0} f(i) \right) - \left(\sum_{f(i) \leq 0} (-f(i)) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i).$$

Aufgabe: Beschreiben Sie in einer ähnlichen Weise das Integral im Fall einer beliebigen Menge X versehen mit dem Zählmaß.

14. INTEGRAL II

14.1. Integration über Teilmengen. Sei wieder (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Ist $E \in \mathcal{A}$ beliebig und ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, so setzen wir

$$\int_E f d\mu = \int_E f := \int_X (f \cdot \chi_E) d\mu$$

und nennen es das Integral von f über die Teilmenge E , falls die rechte Seite definiert ist.

Die Funktion $f \cdot \chi_E$ ist μ -messbar und das Integral auf der rechten Seite ist definiert, wenn $f \cdot \chi_E \geq 0$ oder integrierbar ist.

Das Integral $\int_E f$ hängt nur von den Werten von f auf E ab und ändert sich nicht, wenn wir f außerhalb von E beliebig abändern.

Man kann das Integral über Teilmengen als Integral auf einem (ganzen) Maßraum in der folgenden Weise interpretieren (Aufgabe: Beweisen Sie die folgenden Aussagen!).

Setzen wir $\mathcal{A}_E := \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$, so ist \mathcal{A}_E eine σ -Algebra auf E . Ferner ist $\mu_E : \mathcal{A}_E \subset \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ gegeben durch die Einschränkung von μ ein Maß auf \mathcal{A}_E . Für μ -messbare Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei f_E die Einschränkung von f auf E . Dann ist f_E eine μ_E -messbare Funktion und es gilt

$$\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_E.$$

Aufgabe: Für jede integrierbare Funktion f gilt

$$\int_X f = \int_E f + \int_{E^c} f.$$

Aufgabe: Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, gilt $\mu(E) < \infty$ und gilt $|f(x)| \leq a$ für alle $x \in E$, so ist f auf E integrierbar und

$$\int_E f \leq \int_E |f| \leq a \cdot \mu(E).$$

14.2. Fast überall. Wir nehmen im Folgenden immer an, dass unser Maßraum vollständig ist, d.h., dass jede Teilmenge einer Nullmenge eine Nullmenge ist.

Wir sagen, dass eine von Punkten eines Maßraums $(X, \mathcal{A}, \mu,)$ abhängende Eigenschaft (bzw. für eine Funktion auf diesem Raum) fast überall gilt, wenn die Menge der Punkte, in denen die Eigenschaft nicht gilt eine μ -Nullmenge ist.

Zum Beispiel ist eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fast überall positiv, wenn die Menge $f^{-1}(-\infty, 0)$ eine μ -Nullmenge ist.

Zwei Funktionen f, g stimmen fast überall überein, wenn die Menge der Punkte x mit $f(x) \neq g(x)$ eine μ -Nullmenge ist.

Stimmen zwei Funktionen f, g fast überall überein, so ist f messbar genau dann, wenn g messbar ist. Das Integral $\int f$ ist definiert genau dann, wenn $\int g$ definiert ist und die beiden Werte stimmen überein.

Zum Beispiel stimmt die Dirichlet-Funktion $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fast überall bezüglich des Lebesgue-Maßes mit der konstanten Funktion 0 überein, ist also λ_1 -integrierbar mit Integral 0.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+(X)$ genau dann $\int f = 0$ erfüllt, wenn f fast überall gleich 0 ist.

Eine Folge von Funktionen $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert fast überall gegen eine Funktion f , wenn die Menge der Punkte x , für die die Folge der Zahlen $f_i(x)$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert, eine Nullmenge ist. In diesem Fall gibt es Funktionen \hat{f}_i und \hat{f} , die fast überall mit f_i bzw. mit f übereinstimmen, so dass \hat{f}_i überall punktweise gegen \hat{f} konvergiert.

Grob kann man die obigen Beobachtungen wie folgt zusammenfassen: Nullmengen spielen für die Integration keine Rolle.

14.3. Dirac-Maß. Sei $x \in X$ ein Punkt. Das Dirac-Maß $\delta_x : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ im Punkt x ist gegeben durch $\delta_x(E) = 1$, falls $x \in E$, und $\delta_x(E) = 0$ anderenfalls.

Jede Funktion auf X ist δ_x -messbar. Ferner ist $X \setminus \{x\}$ eine δ_x -Nullmenge und bei aller Fragen der Integration können wir eine Funktion f durch die Funktion $f \cdot \chi_{\{x\}}$ ersetzen, die mit f fast überall übereinstimmt. Andererseits ist $f \cdot \chi_{\{x\}}$ eine einfache Funktion. Wir folgern, dass jede Funktion f integrierbar ist. Es gilt (warum?):

$$\int_X f d\delta_x = f(x) .$$

14.4. Funktionen mit Werten in $[-\infty, \infty]$. Wir folgen der Konvention $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = 0$. Wir bezeichnen als $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ die reellen Zahlen mit den beiden "uneigentlichen" Punkten $\pm\infty$. Wie für Folgen

reeller Zahlen ist die punktweise (oder fast überall) Konvergenz von Funktionen $f_i : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ zu einer Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ wohldefiniert.

Aufgabe: Ist $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ eine monotone Folge von Funktionen $f_i : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, so gibt es den punktweisen Grenzwert $f = \lim f_i : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Ist (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ eine Funktion, so nennen wir f messbar, falls $f^{-1}(\pm\infty) \in \mathcal{A}$ und für jede Borel-Menge $E \subset \mathbb{R}$, das Urbild $f^{-1}(E)$ in \mathcal{A} liegt.

Wie im endlichen Fall gilt Proposition 12.3 und Korollar 12.2, wobei die Summe der Funktionen $f + g$ definiert sein muss. (Beachte, dass alle Operationen bis auf $\infty + (-\infty)$ zulässig und natürlich definiert sind).

14.5. Drei Konvergenzsätze. Im Allgemeinen muss das Integral nicht mit der punktweisen Konvergenz vertauschbar sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

Sei λ das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} , sei $f_n = \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$. Dann sind f_n einfache Funktionen mit Integral 1, die punktweise gegen die konstante Funktion $f = 0$ mit $\int f = 0$ konvergieren.

Unter milden zusätzlichen Annahmen kann man jedoch die Konvergenz mit Integration vertauschen. Der folgende "Satz von der monotonen Konvergenz" ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Beppo Levi.

SATZ 14.1. *Seien $f_i : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar und es gelte $f_1 \leq f_2 \leq \dots$. Gibt es eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ mit $\int f_i \leq L$ für alle i , so ist die Funktion $f = \lim f_i : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar und $\int f = \lim_{i \rightarrow \infty} (\int f_i)$.*

Beweis. Setze $g_i = f_i - f_1$. Dann gilt $0 = g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \dots$. Ferner sind g_i integrierbar und

$$\int g_i = \int f_i - \int f_1 \leq L - \int f_1.$$

Die Funktion $g = f - f_1$ ist der punktweise Grenzwert der Funktionen g_i und nach dem Satz von Beppo Levi gilt $\int g = \lim \int g_i$. Also ist g integrierbar. Damit ist auch f integrierbar. Ferner folgt

$$\int f = \int g + \int f_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} (\int g_i) + \int f_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i.$$

□

Der folgende "Satz von der majorisierten Konvergenz" ist besonders gut für Anwendungen geeignet.

SATZ 14.2. *Seien $f_n, f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Die Funktionen f_n mögen gegen f fast überall konvergieren. Wenn es eine integrierbare Funktion $g :$*

$X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ gibt, für die (für jedes n) die Ungleichung $g \geq |f_n|$ fast überall gilt, so gilt $f_n, f \in \mathcal{L}^1$ und

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n .$$

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit "fast überall" durch überall ersetzen.

Aus $|f_n| \leq g$ folgt auch $|f| \leq g$ und damit die Integrierbarkeit von f_n und f nach Lemma 13.3.

Es reicht zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int |f_n - f| \right) = 0$$

gilt. Nun sind $g_n := |f_n - f|$ durch $2g$ beschränkt und konvergieren punktweise gegen die Nullfunktion. Also konvergieren die Funktionen

$$\hat{g}_n(x) := \sup_{m \geq n} g_m(x)$$

gegen die Nullfunktion. Ferner gilt $2g \geq \hat{g}_1 \geq \hat{g}_2 \dots$

Nach dem Satz über die monotone Konvergenz (angewendet auf $-\hat{g}_n$), konvergieren die Integrale $\int \hat{g}_n$ gegen 0. Daraus folgt sie Aussage. \square

Als eine direkte Anwendung sehen wir, dass wir ein Integral durch "Ausschöpfung" erhalten können:

SATZ 14.3. Seien $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ eine Folge von messbaren Teilmengen in X mit $\cup E_i = X$. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Wenn es ein $L > 0$ gibt, so dass für alle n die Ungleichung

$$\int_{E_n} |f| \leq L$$

gilt, so ist f integrierbar und

$$\int_X f = \lim \int_{E_n} f .$$

Beweis. Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt die Integrierbarkeit von $|f| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f| \cdot \chi_{E_n}$.

Nun folgt aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz, angewendet auf $f_n = f \cdot \chi_{E_n}$ die geforderte Gleichheit (Frage: Was spielt dabei die Rolle von g ?). \square

14.6. Das Riemannsches Integral. Versetzen wir \mathbb{R} mit dem Lebesgue-Maß $\lambda = \lambda_1$.

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so konvergiert für jede Folge von immer feiner werdenden Unterteilungen von $[a, b]$ eine entsprechende Wahl von Treppenfunktionen $T_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig, insbesondere punktweise gegen f .

Die Funktion $|f| + 1$ ist auf $[a, b]$ beschränkt und damit integrierbar auf $[a, b]$ (warum?). Ferner gilt für alle große n die Ungleichung $|f| + 1 \geq T_n$. Nun folgt aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz, dass $\int_{[a,b]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} T_n$.

Da die rechte Seite das Riemann-Integral $\int_a^b f$ definiert, sehen wir, dass das Riemann-Integral $\int_a^b f$ für stetige Funktionen mit dem Lebesgue-Integral $\int_{[a,b]} f d\lambda$ übereinstimmt.

Dasselbe Argument zeigt, dass Riemann-integrierbare Funktionen auch integrierbar in dem obigen Sinne der Maßtheorie sind und die beiden Integrale übereinstimmen.

Der Satz über die Ausschöpfung besagt in diesem Zusammenhang, dass für jede integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ die Gleichheit $\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-n,n]} f$ gilt.

Für stetige Funktionen würden wir in Analysis 1 für die linke Seite $\int_{-\infty}^{\infty} f$ und für $\int_{[-n,n]} f$ den Ausdruck $\int_{-n}^n f$ schreiben.

15. SATZ VON FUBINI UND ANWENDUNGEN

15.1. Formulierung der Sätze von Fubini, Tonelli, Cavalieri. In diesem Kapitel sind alle vorkommenden Maße die Lebesgue-Maße λ_k auf den jeweiligen Euklidischen Räumen. Messbarkeit bedeutet immer Lebesgue-Messbarkeit.

Wir möchten folgende Bezeichnungen für den Fall verwenden, dass eine Zerlegung eines Euklidischen Raums $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ festgelegt wurde (wir denken an den Fall $m = 1, n = 1, 2$). Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als $f_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f_x(y) := f(x, y)$.

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als $A_x \subset \mathbb{R}^m$ den Schnitt (Aufgabe: machen Sie ein Bild!)

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in A\}.$$

SATZ 15.1 (Satz von Tonelli). *Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Dann gilt*

- (1) *Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $f_x(y) \rightarrow f(x, y)$ eine λ_m -messbare Funktion.*

(2) Die fast überall definierte Funktion

$$x \rightarrow \int f_x d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f_x(y) d\lambda_m(y)$$

ist λ_n -messbar.

(3) Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_x(y) d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x).$$

SATZ 15.2 (Satz von Fubini). Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt

- (1) Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $y \rightarrow f_x(y)$ integrierbar.
- (2) Die fast überall definierte Funktion

$$x \rightarrow \int f_x d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f_x(y) d\lambda_m(y)$$

ist λ_n -integrierbar.

(3) Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_x(y) d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x).$$

SATZ 15.3 (Satz von Cavallieri). Sei $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge. Dann ist für fast jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Teilmenge $A_x \subset \mathbb{R}^m$ messbar und

$$\lambda_{n+m}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(A_x) d\lambda_n(x).$$

Aufgabe: Erinnern Sie sich an das Cavallierische Prinzip, das Sie in der Schule gesehen haben, und verstehen Sie, was es mit dem obigen Satz zu tun hat.

15.2. Vertauschbarkeit der Variablen, Induktion. Aus Symmetriegründen kann man in den obigen Sätzen die Rolle von x und y vertauschen. So gilt unter den Annahmen des Satzes von Tonelli oder des Satzes von Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_n(x) \right) d\lambda_m(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_x(y) d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x).$$

Aufgabe: Verstehen Sie die Aussage und versuchen Sie sie formal herzuleiten. Entweder sollte man sich den Beweis unten genau anschauen oder (besser!) eine natürliche Isometrie $\mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ sich anschauen!).

Durch Induktion ergibt sich daraus, dass man Integrale über den \mathbb{R}^n auf ein-dimensionale Integrale zurückführen kann.

Korollar 15.4. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine messbare nicht negative oder integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} (f(x_1, \dots, x_n) d\lambda_1(x_n)) d\lambda_1(x_{n-1}) \dots \right) d\lambda_1(x_1) \right).$$

Wir sehen mit der obigen Bemerkung auch, dass die Reihenfolge in welcher wir nach den einzelnen Variablen integrieren keine Rolle spielt!

Ist es eindeutig klar, dass wie bezüglich der Lebesgue-Maße integrieren, so lassen wir die Bezeichnung λ_i weg und schreiben das obige Intervall (Klammern wegen der Vertauschbarkeit auslassend) auch als

$$\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Dies ist keine (!) neue Aussage, sondern nur eine neue Schreibweise für das Lebesgue-Integral!

15.3. Ein Rechenbeispiel. Sei W der Einheitswürfel $W = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$. Sei die Funktion $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$. Dann ist f integrierbar auf W und es gilt

$$\int_W f = \int_{\mathbb{R}^3} f \cdot \chi_W = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_W(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$

Wir halten zunächst y, z fest. Im innersten Integral steht dann eine von x abhängige Funktion. Diese Funktion ist konstant 0, wenn $(y, z) \notin [0, 1] \times [0, 1]$ und sonst ist sie gleich $(x + 2y + 3z) \cdot \chi_{[0,1]}$. Damit ist das innere Integral 0, wenn $(y, z) \notin [0, 1] \times [0, 1]$ und sonst ist es gleich

$$\int_{[0,1]} f(x, y, z) dx = \int_0^1 (x + 2y + 3z) dx = 2y + 3z + \frac{1}{2}.$$

Im nächsten Schritt erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (2y + 3z + \frac{1}{2}) \cdot \chi_{[0,1] \times [0,1]}(y, z) dy \right) dz = 0$$

für $z \notin [0, 1]$ und für $z \in [0, 1]$ ist das Integral gleich

$$\int_{[0,1]} \left(\frac{1}{2} + 2y + 3z \right) dy = \frac{1}{2} + 3z + 1 = \frac{3}{2} + 3z.$$

Im letzten Schritt sehen wir nun:

$$\int_W f = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + 3z \right) dz = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

15.4. Anmerkung und Anwendungen des Satzes von Cavallieri.

Zunächst machen wir die Bemerkung, dass der Satz von Cavallieri der Spezialfall des Satzes von Tonelli für den Fall $f = \chi_A$ ist. In der Tat ist in diesem Fall $f_x = \chi_{A_x}$.

Wir wenden nun den Satz von Cavallieri in zwei Fällen an. Wir können leicht das Volumen von verallgemeinerten Quadern und Zylindern berechnen:

Lemma 15.5. *Sind $E \subset \mathbb{R}^n$ und $F \subset \mathbb{R}^m$ messbar, so ist $E \times F \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar und es gilt $\lambda_{n+m}(E \times F) = \lambda_n(E) \cdot \lambda_m(F)$.*

Beweis. Sei $E \times F$ messbar. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit $(E \times F)_x = F$, falls $x \in E$ und $(E \times F)_x = \emptyset$ sonst. Damit liefert der Satz von Cavallieri

$$\lambda_{n+m}(E \times F) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(F) \cdot \chi_E(x) d\lambda_n(x) = \lambda_m(F) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E = \lambda_m(F) \cdot \lambda_n(E).$$

Um die Messbarkeit von $E \times F$ zu zeigen, reduziert man die Frage auf den Fall von beschränkten Mengen E und F (wie?). Wir notieren auch, dass für offene bzw. kompakte E und F auch das direkte Produkt $E \times F$ offen bzw. kompakt ist, und damit die Aussage des Lemmas für solche Mengen gilt.

Finde nun kompakte bzw. offene $K_i \subset E \subset U_i$ und $K'_i \subset F \subset U'_i$ wie in Proposition 7.1. Damit erhalten wir $K_i \times K'_i \subset E \times F \subset U_i \times U'_i$ und so dass $\lambda(U_i \times U'_i) - \lambda(K_i \times K'_i)$ für $i \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Damit folgt aber die Messbarkeit von $E \times F$ (warum?). \square

Ebenso können wir nun leicht das Volumen von Kegeln bestimmen.

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $p \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Der Kegel $K(p, B)$ mit Spitze p und Basis B ist die Vereinigung aller linearen Segmente

$$K(p, B) := \{t \cdot p + (1 - t) \cdot q : t \in [0, 1], q \in B\}$$

zwischen p und Punkten $q \in B$.

Aufgabe: Malen Sie einige Bilder!

Lemma 15.6. *Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine affine Hyperebene, sei $B \subset H$ eine $\lambda_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}$ -messbare Menge. Sei $p \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Dann ist der Kegel $K(p, B)$ eine λ_n -messbare Menge und*

$$\lambda_n(K(p, B)) = \frac{1}{n} \cdot \lambda_{n-1}(B) \cdot h$$

wobei h den Abstand des Punktes p von der Hyperebene H bezeichnet.

Proof. Alle Werte und Aussagen sind invariant unter Isometrien des \mathbb{R}^n . Also können wir o.B.d.A. annehmen, dass H die Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \subset$

\mathbb{R}^n ist. Dann ist h der Betrag der n -ten Koordinaten von p und wir können o.B.d.A. annehmen, dass $h \geq 0$. (Aufgabe: Verstehen Sie genau die obigen Argumente!).

Ist $h = 0$, so ist $K(p, B)$ in H enthalten und damit eine Nullmenge. In diesem Fall ist die Aussage erfüllt. Sei nun $h > 0$.

Wir nehmen zunächst an, dass $A = K(p, B)$ messbar ist. Dann wenden wir den Satz von Cavallieri auf die Zerlegung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ (wobei wir zusätzlich die beiden Faktoren vertauschen). Für $t \in \mathbb{R} \setminus [0, h]$ ist der Schnitt $A_t \subset \mathbb{R}^{n-1}$ die leere Menge. Für $t = 0$ ist der Schnitt A_0 genau die Menge B . Für $t \in [0, h)$ haben wir eine natürliche bijektive Abbildung $F_t : A_0 \rightarrow A_t$ gegeben durch

$$F_t(b) = \left(1 - \frac{t}{h}\right) \cdot b + \left(1 - \frac{t}{h}\right) \cdot p',$$

wobei p' die ersten $(n-1)$ -Koordinaten von p sind. Wir folgern (wie?)

$$\lambda_{n-1}(A_t) = \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} \lambda_{n-1}(A_0),$$

für alle $t \in [0, h)$. Nach Cavallieri schließen wir

$$\begin{aligned} \lambda_n(A) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(A_t) d\lambda_1(t) = \int_0^h \lambda_{n-1}(A_t) dt = \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} \cdot \lambda_{n-1}(A_0) dt = \\ &= \lambda_{n-1}(B) \cdot \left(-\frac{h}{n} \cdot \left(1 - \frac{t}{h}\right)^n\right)\Big|_0^h = \lambda_{n-1}(B) \cdot \frac{h}{n}. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis für messbares $K(p, B)$.

Nun beweist man (Aufgabe: Führen Sie den Beweis aus!) die Messbarkeit von $K(p, B)$ wie in Lemma 15.5. \square

Jetzt kann man mit Induktion den Beweis von Lemma 9.3 vervollständigen und damit das Volumen aller Simplizes berechnen. (Aufgabe: Führen Sie es aus!).

Die nächste einfache Anwendung indentifiziert das Integral mit "der Fläche unter dem Graphen".

Lemma 15.7. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ messbar und sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Teilmenge. Dann ist die Menge

$$G^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in A, 0 \leq t \leq f(x)\}$$

eine λ_{n+1} -messbare Teilmenge und es gilt

$$\lambda_{n+1}(G^f) = \int_A f.$$

Beweis. Wir werden den Beweis der Messbarkeit von G^f nicht erbringen und überlassen ihn dem Leser als eine (recht lange) Übungsaufgabe. Unter der Annahme der Messbarkeit folgt aus dem Satz von Cavallieri:

$$\lambda_{n+1}(G^f) = \int_A \lambda_1((G^f)_x) d\lambda_n(x) = \int_A f(x) dx ,$$

da der Schnitt $(G^f)_x$ genau das Intervall $[0, f(x)]$ ist. \square

Die Reihenfolge der Integration in den Sätzen von Fubini und Tonelli bzw. die Wahl der Koordinaten bzgl. der wir die Schnitte bilden im Satz von Cavallieri, beeinflusst das Ergebnis nicht (Was heißt das?). Dies ergibt manchmal nicht-triviale Identitäten wie die folgende Gleichheit, die auch für $n = 1$ nichttrivial ist.

Proposition 15.8. *Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ messbar und sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Teilmenge. Dann gilt*

$$\int_A f = \int_0^\infty \lambda_n(A \cap f^{\geq t}) dt ,$$

wobei $f^{\geq t}$ die Menge der Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) \geq t$ bezeichnet.

Beweis. In den Bezeichnungen von Lemma 15.7 ergibt sich

$$\int_A f = \lambda_{n+1}(G^f) = \int_{[0, \infty)} \lambda_n((G^f)_t) dt = \int_0^\infty \lambda_n((G^f)_t) dt ,$$

wobei $(G^f)_t$ den entsprechenden Schnitt, also die Menge aller Punkte $x \in A$ mit $(x, t) \in G^f$ bezeichnet. Nach Definition ist $(G^f)_t$ genau $A \cap f^{\geq t}$. \square

15.5. Beweis der Sätze von Fubini, Tonelli, Cavallieri. Wir werden die Beweise nur skizzieren. Für Details verweisen wir auf jedes Lehrbuch, z.B. auf [Kön93]. Unser Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

1) Der Satz von Tonelli impliziert den Satz von Fubini.

Dafür schreiben wir $f = f^+ - f^-$ und wenden den Satz von Tonelli auf f^\pm an.

2) Der Satz von Cavallieri folgt aus dem Satz von Tonelli.

Wir wenden den Satz von Tonelli auf die Funktion χ_A an.

3) Gelten die Sätze von Fubini (bzw. Tonelli) für zwei Funktionen f, g , so auch für ihre Linearkombinationen.

Dies folgt aus der Linearität der Integrale (und der Tatsache, dass die Vereinigung von zwei Nullmengen eine Nullmenge ist).

4) Gilt der Satz von Tonelli für eine Folge messbarer Funktionen $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots$ dann auch für den punktweisen Grenzwert $f = \lim f_n$.

Dies folgt aus der Tatsache, dass eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist und aus dem Satz über die monotone Konvergenz.

5) Es reicht den Satz von Tonelli für den Fall einer charakteristischen Funktion $f = \chi_A$ zu beweisen.

Dies folgt aus (4), (3) und dem Approximationssatz 12.5.

6) Der Satz von Tonelli gilt für $f = \chi_A$, wenn A ein Quader ist.

Dies folgt durch direktes Nachrechnen.

7) Der Satz von Tonelli gilt für die charakteristische Funktion $f = \chi_A$ jeder Nullmenge A .

Um dies zu sehen, finden wir für jedes natürliche m eine Überdeckung von A durch Quader Q_i^k mit Summe der Volumina kleiner als $\frac{1}{k}$. Nach (3), (4), (6) gilt der Satz für $f_k := \sum \chi_{Q_i^k} \geq f$. Dann gilt für $g = \inf_k f_k$, dass g_x messbar für alle x ist, dass $g \geq f$ gilt und dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} g_x(y) d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x) \leq \frac{1}{k}$$

für alle k . Also ist die linke Seite 0. Folglich ist für fast alle x die Funktion g_x fast überall 0. Dann gilt es auch für f .

8) Es reicht den Satz von Tonelli für die charakteristische Funktion $f = \chi_U$ jeder offenen Menge U zu beweisen.

Denn jede messbare Menge A ist die Differenz des Durchschnittes $\cap U_i$ einer absteigenden Folge von offenen Mengen und einer Nullmenge. Damit würde die Aussage für χ_A aus (7), der Aussage für jedes χ_{U_i} und dem Satz über die monotone Konvergenz folgen.

9) Jede offene Menge U ist eine disjunkte Vereinigung einer abzählbaren Vereinigung von Quadern und einer Nullmenge.

Dies wird in einer Aufgabe bewiesen.

10) Der Satz von Tonelli gilt für die charakteristische Funktion χ_U einer offenen Menge U .

Dazu schreiben wir χ_U als abzählbare Summe $\chi_U = \chi_A + \sum \chi_{Q^i}$ mit Quadern Q^i und einer Nullmenge A und folgern die Aussage aus (7), (6), (4) und (3).

16. TRANSFORMATIONSFORMEL

16.1. Formulierung und Spezialfälle. Unser nächstes Ziel ist der folgende Satz, der die Änderung (=Transformation) der Lebesgue-Maße und der Lebesgue-Integrale unter differenzierbaren Abbildungen beschreibt.

Aufgabe: Erinnern Sie sich, was ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen in \mathbb{R}^n ist.

Für eine differenzierbare Abbildung $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ bezeichnen wir im Folgenden mit $d\Phi(x)$ das Differential von Φ im Punkte $x \in U$.

Das Differential $d\Phi(x)$ ist eine lineare Abbildung, deren darstellende Matrix (bezüglich der Standard-Basen) Jacobi-Matrix heißt und als Einträge die partiellen Ableitungen hat:

$$d\Phi(x)_{ji} = \partial_i \Phi_j, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$$

SATZ 16.1. Sei $\Phi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$.

Eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist messbar genau dann, wenn die Funktion $g := (f \circ \Phi) : U \rightarrow \mathbb{R}$ messbar ist.

Ist $f \geq 0$ oder ist f integrierbar, so gilt

$$\int_U g(x) \cdot |\det d\Phi(x)| dx = \int_V f(y) dy,$$

insbesondere gilt im zweiten Fall $g \cdot |\det d\Phi| \in \mathcal{L}^1(U)$.

Folgender wichtiger Spezialfall ergibt sich, wenn wir für f die charakteristische Funktion einer Teilmenge $\Phi(E)$ einsetzen:

Korollar 16.2. Sei $\Phi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $E \subset U$ ist messbar genau dann, wenn $\Phi(E)$ messbar und es gilt

$$\lambda(\Phi(E)) = \int_E |\det d\Phi|.$$

Aufgabe: Leiten Sie das Korollar aus der Transformationsformel her.

Zwei wichtige Spezialfälle kennen wir bereits:

1) Ist $n = 1$ und sind $U = (a, b)$ und $V = (c, d)$ zwei Intervalle, so ist Φ eine strikt monotone Funktion. In diesem Fall ist das Differential $d\Phi$ gleich der Ableitung Φ' ; und $\det(d\Phi) = \Phi'$.

Ist Φ monoton wachsend, so ist $\Phi' > 0$, also fallen die Betragsstriche in der obigen Formel weg. Für eine auf $[c, d]$ stetige Funktion f besagt die Substitutionsregel nun genau

$$\int_V f = \int_c^d f(y) dy = \int_a^b (f \circ \Phi)(x) \cdot \Phi'(x) dx = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det d\Phi|.$$

Aufgabe: Was passiert, wenn Φ monoton fallend ist?

Also ist Satz 16.1 die mehrdimensionale Verallgemeinerung der Substitutionsregel.

2) Ein weiterer Spezialfall ist Satz 8.3, der genau das Korollar 16.2 im Fall einer linearen Abbildung Φ ist.

Aufgabe: Versuchen Sie einen Zusammenhang zwischen dem Spezialfall (2) und dem allgemeinen Fall von Korollar 16.2 herzustellen.

16.2. Beispiel der Polarkoordinaten. Wir besprechen Polarkoordinaten nur in \mathbb{R}^2 , obwohl ähnliche aber etwas kompliziertere Formeln in allen Dimensionen existieren.

Betrachten wir die (vermutlich wohlbekannt) Abbildung $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\Phi(r, \phi) := (r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi)$.

Wir rechnen nach (Aufgabe: tun Sie es!), dass $\det d\Phi(r, \phi) = r$ gilt. Insbesondere ist Φ ein lokaler Diffeomorphismus (Was heißt es und wieso gilt es?).

Ferner ist aus Analysis 1, 2 bekannt, dass die Einschränkung von Φ auf $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ eine bijektive Abbildung auf die geschlitzte Ebene $V = \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty)$ ist (Der entfernte Strahl $[0, \infty)$ ist der positive Strahl in der x -Achse). Die Umkehrabbildung Φ^{-1} ordnet einem Punkt $p = (x, y)$ seine "Polarkoordinaten" (r, ϕ) zu. Dabei ist $r = \|(x, y)\|$ die Norm des Punktes p und ϕ beschreibt den (gerichteten) Winkel zwischen dem positiven Strahl in der x -Achse und dem radialen Strahl durch p .

Da ein Strahl eine λ_2 -Nullmenge ist, ergibt sich aus Satz 16.1 und dem Satz von Fubini (wie genau?):

Proposition 16.3. *Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine λ_2 -messbare entweder nicht-negative oder integrierbare Funktion. Dann ist $f \circ \Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \cdot f(r \cos \phi, r \sin \phi) d\phi dr .$$

Hängt $f(p)$ nur von der Norm von $\|p\|$ ab, gilt also $f(p) = g(\|p\|)$ für eine Funktion g , so ist g eine λ_1 -messbare Funktion und

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(p) dp = 2\pi \cdot \int_0^\infty r \cdot g(r) dr .$$

16.3. Vorbereitende Aussagen. In dem Beweis des Transformationssatzes und später werden wir einige allgemeine Aussagen über \mathcal{C}^1 -Abbildungen benutzen. Für spätere Anwendungen formulieren wir diese Aussage für Abbildungen in höherdimensionale Räume \mathbb{R}^k , $k \geq n$ und das Hausdorffmaß \mathcal{H}^n auf \mathbb{R}^k (Für $k = n$ ist $\mathcal{H}^n = \lambda_n$).

Lemma 16.4. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung. Dann ist die Einschränkung von Φ auf jede kompakte konvexe Teilmenge $K \subset U$ Lipschitz-stetig.*

Ist $E \subset U$ eine λ_n -Nullmenge, so ist $\Phi(E)$ eine \mathcal{H}^n -Nullmenge.

Ist $E \subset U$ eine λ_n -messbare Teilmenge, so ist $\Phi(E) \subset \mathbb{R}^k$ eine \mathcal{H}^n -messbare Teilmenge.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus dem Schrankensatz (Aufgabe: erinnern sie sich, was er besagt!). Als Lipschitzkonstante kann das Supremum der Operatornormen $\|d\Phi(x)\|_{op}$ über alle $x \in K$ dienen.

Aufgabe: wofür sind die Annahmen der Konvexität und der Kompaktheit nötig?

Nun können wir U als eine abzählbare Vereinigung von kompakten Quadern $Q_i \subset U$ schreiben (warum?). Um die beiden anderen Aussagen zu beweisen, können wir uns auf den Fall $E \subset Q_i$ einschränken (wieso?).

In diesem Fall erhalten wir aus den Eigenschaften des Hausdorff-Maßes $\mathcal{H}^n(\Phi(E)) \leq L^n \cdot \lambda_n(E)$, wobei L die Lipschitzkonstante von Φ auf Q_i bezeichnet. Dies ergibt die zweite Aussage.

Jedes λ_n -messbare E ist eine abzählbare Vereinigung $E = \cup K_j \cup E_0$, wobei alle K_j kompakt und E_0 eine λ_n -Nullmenge ist. Dann ist $\Phi(E) = \cup \Phi(K_j) \cup \Phi(E_0)$ auch eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen und einer \mathcal{H}^n -Nullmenge und deswegen \mathcal{H}^n -messbar (wieso?). \square

Das nächste Lemma ist eine etwas genauere Variante der Aussage, dass die Ableitung einer differenzierbaren Abbildung Φ , die Abbildung in erster Näherung approximiert.

Lemma 16.5. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung. Sei die lineare Abbildung $L = d\Phi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ injektiv für ein $x \in U$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig.*

Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $y, z \in B_\delta(x) \subset U$ die folgenden Ungleichungen gelten.

$$\frac{1}{1 + \epsilon} \cdot \|L(y) - L(z)\| \leq \|\Phi(y) - \Phi(z)\| \leq (1 + \epsilon) \cdot \|L(y) - L(z)\|.$$

Aufgabe: Analysieren Sie den Fall $n = k = 1$. Zeigen Sie, dass die Bedingungen, dass das Differential injektiv und (schwieriger!) dass die Funktion stetig differenzierbar und nicht nur differenzierbar ist, notwendig sind.

Beweis. Finde $C > 0$, so dass $\|L(v)\| \geq C \cdot \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ (Warum ist es möglich?).

Wähle ein kleines $\rho > 0$ (das am Ende des Beweises angepasst wird). Finde $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$ und so dass für alle $y \in B_\delta(x)$ die folgende Ungleichung erfüllt ist.

$$\|L - d\Phi(y)\|_{op} < \rho.$$

Dann gilt für $y, z \in B_\delta(x)$ (Begründung?)

$$\Phi(y) - \Phi(z) = \int_0^1 d\Phi((1-t) \cdot y + t \cdot z) \cdot (y - z) dt =$$

$$= L \cdot (y - z) + \int_0^1 (d\Phi((1-t)y + t \cdot z) - L) \cdot (y - z) \cdot dt.$$

Die Norm des zweiten Summanden ist höchstens $\rho \cdot \|y - z\|$ (warum?), folglich erhalten wir

$$\|L \cdot (y - z)\| - \rho \cdot \|y - z\| \leq \|\Phi(y) - \Phi(z)\| \leq \|L \cdot (y - z)\| + \rho \cdot \|y - z\|.$$

Wenn ρ so gewählt worden ist, dass $\frac{\rho}{C} < \epsilon$ und $1 - \frac{\rho}{C} > \frac{1}{1+\epsilon}$ gilt (warum ist es möglich?), so erhalten wir die gewünschte Ungleichung (Aufgabe: Rechnen Sie es nach!). \square

Das Lemma hat die folgende geometrische Interpretation (Leiten sie die Aussage her!):

Korollar 16.6. Sei $\Phi, x, L = d\Phi(x), \epsilon > 0, \delta > 0$ wie in Lemma 16.5. Dann ist die Abbildung $\Phi : B_\delta(x) \rightarrow \mathbb{R}^k$ injektiv. Die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : \Phi(B_\delta(x)) \rightarrow B_\delta(x)$ ist Lipschitz-stetig und die Komposition

$$\Psi := L \circ \Phi^{-1} : \Phi(B_\delta(x)) \rightarrow L(B_\delta(x))$$

ist eine bijektive Abbildung; sowohl Ψ als auch Ψ^{-1} haben Lipschitz-Konstante $\leq (1 + \epsilon)$.

Also ändert die Abbildung Ψ das \mathcal{H}^n -Maß von allen Teilmengen höchstens um den Faktor $(1 + \epsilon)^n$.

16.4. Beweis der Transformationsformel. Der Beweis von Satz 16.1 besteht in der Reduktion zu einem Spezialfall von Korollar 16.2, ähnlich zum Beweis des Satzes von Fubini, und anschließender Reduktion auf den bereits bekannten linearen Fall mit Hilfe von Lemma 16.5.

Beweis. [Beweis von Satz 16.1] Wegen der Linearität der beiden Seiten, reicht es, den Satz für nicht-negative f zu beweisen. Argumentiert man mit der Linearität und benutzt den Satz über die monotone Konvergenz, wie im Beweis des Satzes von Tonelli, so führt man die Aussage auf den Fall $f = \chi_E$, also auf Korollar 16.2 zurück.

Schöpfen wir E durch kompakte Teilmengen und eine Nullmenge aus und benutzen wir wieder den Satz über die monotone Konvergenz und die letzte Aussage von Lemma 16.4, so reicht es Korollar 16.2 in dem Fall einer kompakten Teilmenge $E \subset U$ zu beweisen.

Wir halten E fest und wählen $\epsilon > 0$ beliebig.

Für jedes $x \in U$ finden wir ein $\delta > 0$ wie in Lemma 16.5. Wir machen δ , wenn nötig, kleiner und können zusätzlich

$$\frac{1}{1 + \epsilon} |\det L| \leq |\det d\Phi(z)| \leq (1 + \epsilon) \cdot |\det L|$$

annehmen. Für jede λ_n -messbare Teilmenge $A \subset B_\delta(x)$ erhalten wir

$$\int_A |\det(d\Phi(z))| dz \leq \int_A (1+\epsilon) \cdot |\det L| = (1+\epsilon) \cdot |\det L| \cdot \lambda_n(A) = (1+\epsilon) \cdot \lambda_n(L(A)).$$

Genauso sehen wir $\int_A |\det(d\Phi(z))| dz \geq (1+\epsilon)^{-1} \cdot \lambda_n(L(A))$.

Ferner gilt nach Korollar 16.6

$$(1+\epsilon)^{-n} \cdot \lambda_n(L(A)) \leq \lambda_n(\Phi(A)) \leq (1+\epsilon)^n \lambda_n(L(A)).$$

Zusammengenommen zeigen die beiden Ungleichungen:

$$(1+\epsilon)^{-(n+1)} \int_A |\det(d\Phi(z))| \leq \lambda_n(\Phi(A)) \leq (1+\epsilon)^{n+1} \int_A |\det(d\Phi(z))|.$$

Nun können wir unsere Teilmenge E durch endlich viele solche Bälle $B_{\delta_i}(x_i)$ überdecken und als eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Teilmengen $E = \cup_{i=1}^m A_i$ schreiben, wobei jedes A_i in so einem Ball $B_{\delta_i}(x_i)$ enthalten ist. Durch Summation (was heißt das?) folgern wir

$$(1+\epsilon)^{-(n+1)} \int_E |\det(d\Phi(z))| \leq \lambda_n(\Phi(E)) \leq (1+\epsilon)^{n+1} \int_E |\det(d\Phi(z))|.$$

Weil dies für jedes $\epsilon > 0$ funktioniert, ergibt sich die Gleichheit in Korollar 16.2, was den Beweis von Satz 16.1 beendet. \square

17. EINIGE RECHNUNGEN

17.1. Spezialfall der Polarkoordinaten in n Dimensionen. Ohne auf die allgemeinen Polarkoordinaten einzugehen, besprechen wir noch den folgenden wichtigsten Spezialfall:

Proposition 17.1. *Sei $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann ist die Funktion $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ gegeben durch $\hat{f}(p) = f(\|p\|)$ messbar und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} = n \cdot \sigma_n \cdot \int_{[0, \infty)} f(r) \cdot r^{n-1} dr,$$

wobei $\sigma_n = \lambda_n(B_1(0))$ das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Beweis. Die Messbarkeit ergibt sich, weil \hat{f} eine Komposition von messbaren Abbildungen ist (Aufgabe: Überprüfen Sie bezüglich welcher σ -Algebren Messbarkeit betrachtet wird).

Stimmt die Aussage für zwei Funktionen $f_{1,2}$, so auch für deren Linearkombinationen (mit nicht-negativen Koeffizienten, oder mit beliebigen Koeffizienten, falls die Integrale endlich sind). Dies ergibt sich aus der Linearität des Integrals.

Mit dem Satz über die monotone Konvergenz führen wir die Aussage auf den Fall $f = \chi_A$ zurück, für eine messbare Menge $A \subset [0, \infty)$.

Wieder wie im Beweis des Satzes von Fubini–Tonelli, reduziert man die Aussage auf den Fall, dass die Teilmenge A offen ist. Zerlegt man ein offenes A in seine disjunkte Zusammenhangskomponenten und benutzt Linearität und monotone Konvergenz (wie genau?), so reduziert man die Aussage auf den Fall, dass A ein offenes Intervall $A = (a, b)$ ist. In diesem Fall gilt $f = \chi_{(a,b)}$ und

$$n \cdot \sigma_n \int_{[0,\infty)} f(r)r^{n-1}dr = \sigma_n \int_a^b n \cdot r^{n-1} dr = \sigma_n \cdot (b^n - a^n) .$$

Aber die rechte Seite ist genau die Differenz $\lambda_n(B_b(0)) - \lambda_n(B_a(0)) = \lambda_n(B_b(0)) - \lambda_n(\bar{B}_a(0))$. Da \hat{f} in diesem Fall die charakteristische Funktion der Kugelschale $B_b(0) - \bar{B}_a(0)$ ist, beendet dies den Beweis. \square

17.2. Das Gaußsche Integral. Betrachte auf dem \mathbb{R}^n die Funktion

$$f_n(x) = e^{-\|x\|^2} = e^{-x_1^2} \cdot e^{-x_2^2} \cdot \dots \cdot e^{-x_n^2} .$$

Dies ist eine positive, glatte (insbesondere messbare) durch $1 = f_n(0)$ von oben beschränkte Funktion. Nach dem Satz von Tonelli gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} \cdot e^{-x_2^2} \cdot \dots \cdot e^{-x_n^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} dx_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2} dx_2 \cdot \dots \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2} dx_n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^n . \end{aligned}$$

Für $n = 2$ ergibt Integration in Polarkoordinaten:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_2(x) dx = 2\pi \cdot \int_{(0,\infty)} e^{-r^2} r dr = 2\pi \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^s = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi .$$

Zusammengenommen erhalten wir also

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx = \pi^{\frac{n}{2}} .$$

Für $n = 1$ erhalten wir auf dem Umweg über die mehrdimensionale Integration die berühmte Gaußsche Formel

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} .$$

17.3. Volumen von Kugeln. Das Volumen σ_n der Einheitskugeln $B^n = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ berechnen wir auf zwei Weisen. Mit Hilfe des Satzes von Cavalieri für die Zerlegung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ sehen wir

$$\sigma_n = \lambda_n(B^n) = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \lambda_2(B_x^n) d\lambda_{n-2}(x) .$$

Nun ist aber für $x \in \mathbb{R}^{n-2}$ der Schnitt B_x^n von B^n (also die Menge aller Punkte aus B^n mit den ersten $(n-2)$ -Koordinaten gegeben durch x)

leer, wenn $\|x\| \geq 1$ und ein Ball in \mathbb{R}^2 um 0 mit Radius $\sqrt{1 - \|x\|^2}$, falls $\|x\| < 1$ (warum ist es wahr?).

Folglich erhalten wir durch eine Anwendung von Proposition 17.1:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \int_{B^{n-2}} \pi \cdot (1 - \|x\|^2) d\lambda_{n-2}(x) = (n-2) \cdot \sigma_{n-2} \int_{(0,1)} \pi \cdot r^{n-3} (1-r^2) dr = \\ &= \pi \cdot (n-2) \cdot \sigma_{n-2} \int_0^1 (r^{n-3} - r^{n-1}) dr = \pi \cdot (n-2) \cdot \sigma_{n-2} \cdot \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) = \frac{2\pi}{n} \cdot \sigma_{n-2}.\end{aligned}$$

Insbesondere ist das Volumen der drei-dimensionalen Einheitskugel $\sigma_3 = \frac{2\pi}{3} \cdot 2 = \frac{4\pi}{3}$. Für $n = 4$ erhalten wir $\sigma_4 = \frac{\pi^2}{2}$.

Aufgabe: Warum waren die Rechnungen einfacher für die Zerlegung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ als für die naheliegendere Zerlegung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$?

Mit Hilfe des Gaußschen Integrals und Proposition 15.8 erhalten wir einen anderen nicht-induktiven Zugang zu σ_n . Dafür machen wir zuerst die Beobachtung, dass für die Funktion $f_n(x) = e^{-\|x\|^2}$, deren Integral wir kennen, die Menge $f_n^{>t}$ aller Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f_n(x) \geq t$ wie folgt aussieht. Für $t > 1$ ist die Menge $f_n^{>t}$ leer. Für $0 < t < 1$ ist f_n^t die Menge aller $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| \leq \sqrt{-\log(t)}$, also ein abgeschlossener Ball mit Radius $\sqrt{-\log(t)}$.

Aus Proposition 15.8 erhalten wir (wieso ist $t = 1$ nicht wichtig?)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n = \int_0^\infty \lambda_n(f_n^{\geq t}) dt = \int_0^1 \sigma_n \cdot (\sqrt{-\log(t)})^n = \sigma_n \cdot \int_0^1 (-\log(t))^{\frac{n}{2}} dt.$$

Das Integral kann man mit Hilfe der Substitutionsformel schreiben als

$$\int_0^1 (-\log(t))^{\frac{n}{2}} dt = \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}} e^{-s} ds.$$

und wird als $\Gamma(1 + \frac{n}{2})$ bezeichnet, wobei Γ die sogenannte Gamma-Funktion bezeichnet

$$\Gamma(r) := \int_0^\infty s^{r-1} e^{-s} ds.$$

Mit Hilfe der Gamma-Funktion, lässt sich das Volumen der Kugel nun wie folgt ausdrücken:

$$\sigma_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}.$$

18. ZUSATZKAPITEL

Dieses Kapitel ist nicht klausurrelevant aber hilfreich für das Verständnis.

18.1. Existenz spezieller Funktionen. Lebesgue-messbare Funktionen können nicht nur durch einfache sondern auch durch stetige Funktionen approximiert werden, wie wir bald sehen werden.

Zunächst eine Definition. Für eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem metrischen Raum X ist der Träger von f definiert als der Abschluss

$$\text{spt}(f) := \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}.$$

Als Ausgangspunkt dient die *Existenz einer glatten Zerlegung der Eins*, die auch eine wichtige Rolle in Analysis spielt.

SATZ 18.1. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und seien U_i offene Mengen in \mathbb{R}^n , die K überdecken. Dann gibt es endlich viele glatte Funktionen $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit kompaktem Träger, so dass die Summe $\sum_{j=1}^k f_j$ is konstant 1 auf K ist und Folgendes gilt: Für jedes j gibt es ein $i = i(j)$, so dass der Träger von f_j in U_i enthalten ist.

Als Spezialfall für nur eine Menge U_i erhalten wir:

Korollar 18.2. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt, so gibt es eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, mit $1 \geq f \geq 0$, $f(K) = \{1\}$ und kompaktem Träger $\text{spt}(f)$, der in U enthalten ist.

Beweis. Der Beweis (von Satz 18.1) erfolgt in mehreren Schritten.

1. Für alle $a < b \in \mathbb{R}$ gibt es eine glatte monotone Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f(t) = 1$ für all $t \leq a$ und $f(t) = 0$ für alle $t \geq b$.

Aufgabe: Malen Sie ein Bild und erinnern Sie sich an die Konstruktion aus Analysis 1 (oder lesen Sie es nach).

2. Sind $B_1 \subset B_2$ konzentrische Bälle in \mathbb{R}^n mit Radien $a < b$ und Zentrum p , so gibt es eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit Werten in $[0, 1]$, so dass $f(B_1) = \{1\}$ und $f(\mathbb{R}^n \setminus B_2) = \{0\}$.

Zum Beweis nehme die Komposition der Funktion aus (1) und der glatten Funktion $g(x) := \|p - x\|^2$.

3. Seien nun K und U_i wie in den Voraussetzungen. Für jedes $x \in K$ finde ein i mit $x \in U_i$ und kompakte konzentrische Bälle $V_x \subset W_x$, die auch in U_i enthalten sind.

Wegen der Kompaktheit von K überdecken endlich viele der offenen Bälle V_x die Menge K . Für jeden dieser endlich vielen V_{x_j} finden wir mit (2) eine glatte Funktion $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit Bild in $[0, 1]$ und $g_j(V_{x_j}) = 1$, $\text{spt}(g_j) \subset W_{x_j}$.

Damit erhalten wir endlich viele nicht-negative Funktionen g_1, \dots, g_k , so dass $g := \sum g_j > 0$ auf K und so dass $\text{spt}(g_j)$ eine kompakte Teilmenge von einem $U_{i(j)}$ ist.

4. Sei $\epsilon > 0$ das Minimum von g auf K (K ist kompakt!). Betrachte eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie in (1) für $a = \frac{\epsilon}{4}, b = \frac{\epsilon}{2}$.

Dann ist die Funktion $\hat{g}(x) = \frac{f(g(x))}{g(x)}$ falls $g(x) \neq 0$ und $\hat{g}(x) = 0$ falls $g(x) = 0$ glatt auf \mathbb{R}^n . Die Funktion \hat{g} stimmt auf K mit $\frac{1}{g}$ überein.

5. Nun setze $f_j(x) := g_j(x) \cdot \hat{g}(x)$

Dies sind glatte Funktionen, deren Träger die gewünschte Eigenschaft haben. Ferner ist die Funktion $f = \sum f_j$ genau $f(g(x))$ aus (4) und damit gleich 1 auf K . \square

18.2. Messbar ist fast Borel und fast stetig. Weil alle Borelmengen Lebesgue-messbar sind, ist jede Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auch Lebesgue-messbar. Die Umkehrung gilt "fast".

SATZ 18.3. *Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Funktion. Dann gibt es eine Borel-messbare Funktion $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\hat{f} = f$ fast überall auf \mathbb{R}^n .*

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

1. Die Aussage gilt für charakteristische Funktionen $f = \chi_A$.

Dies folgt direkt aus Proposition 7.3.

2. Die Aussage gilt für einfache Funktionen f .

Dies folgt aus (1).

3. Es reicht die Aussage für $f \geq 0$ zu zeigen.

Dies folgt durch die Zerlegung $f = f^+ - f^-$.

4. Ist $f \geq 0$, so finden wir eine monoton konvergente Folge von einfachen Funktionen $f_n \rightarrow f$. Wähle für jedes n , eine Borel-messbare Funktion \hat{f}_n , die mit f_n bis auf eine Nullmenge N_n übereinstimmt. Finde eine Borel-Menge N von Maß 0, die $\cup_n N_n$ enthält. Setze nun

$$\tilde{f}_n := \hat{f}_n \cdot \chi_{N^c} = f_n \cdot \chi_{N^c}.$$

Dann ist \tilde{f}_n eine Borel-messbare Funktion. Der punktweise Grenzwert \tilde{f} von \tilde{f}_n existiert überall auf \mathbb{R}^n , ist konstant 0 auf N und stimmt mit f auf N^c überein. Nach Proposition 12.3 ist \tilde{f} Borel-messbar. \square

Etwas komplizierter ist der Satz von Lusin, der besagt, dass jede Lebesgue-messbare Funktion "fast" stetig ist:

SATZ 18.4. *Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine stetige Funktion $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\lambda(N) < \epsilon$ gilt, mit $N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq \hat{f}(x)\}$.*

Beweis. Der Beweis folgt dem üblichen Muster mit ein paar zusätzlichen Überlegungen.

1. Gilt die Aussage für $f \geq 0$, so auch für beliebige f .

2. Gilt die Aussage für Funktionen $f \geq 0$ mit Träger in einem kompakten Ball, dann auch für alle Funktionen.

Hierzu zerlege \mathbb{R}^n in disjunkte Vereinigung $A_1 = B_1(0)$ und $A_i := B_i(0) \setminus B_{i-1}(0)$ für $i > 1$. Mit $f_i := f \cdot \chi_{A_i}$ schreiben wir ein beliebiges messbares $f \geq 0$ als eine Reihe

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i .$$

Nach Annahme finden wir für jedes i ein stetiges \hat{f}_i , das mit f_i bis auf eine Menge N_i von Maß $4^{-i} \cdot \epsilon$ übereinstimmt. Durch Multiplikation mit einer geeigneten stetigen Funktion (welcher?) kann man zudem annehmen, dass der Träger von f_i in $A_i \cup A_{i-1} \cup A_{i+1}$ enthalten ist.

Die Funktion $\hat{f} := \sum \hat{f}_i$ ist stetig. Denn auf jedem Ball $B_k(0)$ stimmt \hat{f} mit der endlichen Summe $\sum_{i=1}^{k+1} \hat{f}_i$ überein.

Ferner stimmt \hat{f} mit f außerhalb der Teilmenge $N = \cup N_i$ überein, und $\lambda(N) < \epsilon$.

3. Gilt die Aussage für beschränkte Funktionen $f \geq 0$ mit kompaktem Träger, dann auch für alle Funktionen f .

Sei $f \geq 0$ messbar mit kompaktem Träger. Sei E_n die Menge der Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) \geq n$. Dann gilt $\lim(\lambda(E_n)) = 0$ (warum?). Also ist für n groß genug, die Funktion $\tilde{f} = f \cdot \chi_{E_n^c}$ beschränkt und stimmt mit f bis auf einer Menge vom Maß $\leq \frac{\epsilon}{2}$ überein. Nach Annahme finden wir eine stetige Funktion \hat{f} , die mit \tilde{f} bis auf einer Menge vom Maß $< \frac{\epsilon}{2}$ übereinstimmt. Dann stimmen f und \hat{f} bis auf einer Menge vom Maß $< \epsilon$ überein.

4. Die Aussage gilt für $f = \chi_A$ mit $\lambda(A) < \infty$.

Um dies zu sehen, betrachten wir $K \subset A \subset U$, so dass K kompakt, U offen ist und $\lambda(U \setminus K) < \epsilon$ gilt. Nach Korollar 18.2 finden wir eine stetige Funktion \hat{f} , die auf K den Wert 1 und außerhalb von U den Wert 0 annimmt. Dies ist die gesuchte Funktion.

5. Die Aussage gilt für einfache Funktionen $f = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i}$, wenn $\lambda(A_i) < \infty$ für alle i .

Dies folgt direkt aus (4).

6. Sei nun die einfache Funktion $f \geq 0$ beschränkt und mit kompaktem Träger. Wir finden wegen Satz 12.5 einfache $f_i \geq 0$ die monoton und gleichmässig gegen f konvergieren. Nach Wahl einer Teilfolge können wir annehmen, dass $0 \leq f - f_i \leq 2^{-i}$ auf \mathbb{R}^n gilt.

Der Träger der einfachen Funktionen f_i ist im Träger von f enthalten, also auch der Träger der einfachen Funktion $s_i := f_i - f_{i-1}$. Nach Konstruktion gilt $2^{-i+1} \geq s_i \geq 0$.

Wegen (5) finden wir ein stetiges \hat{s}_i , das mit s_i bis auf einer Menge E_i vom Maß $< 2^{-i} \cdot \epsilon$ übereinstimmt. Ferner dürfen wir $2^{-i+1} \geq \hat{s}_i \geq 0$ annehmen.

Nun konvergiert die Reihe $\sum \hat{s}_i$ der stetigen Funktionen gleichmäßig gegen eine stetige Funktion \hat{f} . Die Funktion \hat{f} stimmt außerhalb von $E = \cup E_i$ mit f überein. \square

18.3. Darstellungssatz von Riesz. Die Integrationstheorie ordnet jedem Maß ein Integral zu. In vielen wichtigen Fällen lässt sich dieser Prozess umkehren, wie wir jetzt erläutern werden.

Sei μ ein Maß auf dem Euklidischen Raum \mathbb{R}^n für das alle Borelmengen messbar sind, d.h. in der σ -Algebra liegen, auf der μ definiert ist. Wir nennen μ ein Radon-Maß, wenn $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$.

Alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind μ -messbar. Sei $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ der Vektorraum der auf \mathbb{R}^n stetigen Funktionen mit kompakten Träger. Jede Funktion aus $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ ist μ -integrierbar (warum?) und das μ -Integral $f \rightarrow \int f d\mu$ ist eine lineare Abbildung

$$\int d\mu : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} ,$$

die nicht-negative Funktionen auf nicht-negative Zahlen abbildet.

Der folgende Satz von Riesz besagt, dass jedes Integral (d.h. jede Abbildung mit den obigen Eigenschaften) von einem Maß herrührt. Der Satz gilt nicht nur im Euklidischen Raum, sondern in den meisten "vernünftigen" metrischen Räumen.

SATZ 18.5. *Sei $L : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, die alle nicht-negativen Funktionen auf nicht-negative Zahlen abbildet. Dann gibt es ein eindeutiges Radon-Maß $\mu^L : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle Funktionen $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ die Gleichheit gilt*

$$L(f) = \int f d\mu^L .$$

Der Beweis des Satzes ist recht lang und wird hier nicht erbracht. Als einzige Erklärung geben wir die Methode an, mit der das Maß aus dem Integral "wiedergewonnen" werden kann. Das folgende Lemma ist auch Ausgangspunkt des Beweises des obigen Satzes:

Lemma 18.6. Sei μ ein Radon-Maß auf \mathbb{R}^n . Dann gilt für jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$\mu(U) = \sup\left\{ \int f \, d\mu : f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n), 0 \leq f \leq 1, \text{spt}(f) \subset U \right\}.$$

Beweis. Für jedes f wie oben, gilt $\chi_U \geq f$ also $\mu(U) \geq \int f \, d\mu$.

Andererseits, finden wir wie in Kapitel 6 eine aufsteigende Folge kompakter Mengen $K_i \subset U$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(K_i) = \mu(U)$.

Mit Hilfe von Korollar 18.2 konstruieren wir Funktionen $f_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \geq f_i \geq 0$, $f_i(K_i) = \{1\}$, und so dass der Träger von f_i in U enthalten ist. Dann gilt $\int f_i \geq \mu(K_i)$. Für $i \rightarrow \infty$ impliziert dies die umgekehrte Ungleichung " \leq ". \square

18.4. Maße mit gleichen Nullmengen. Hat man zwei Maße μ, ν auf einem Raum X mit einer σ -Algebra \mathcal{A} , so müssen μ -Nullmengen nichts mit den ν -Nullmengen zu tun haben. Ein gutes Beispiel hierfür ist das Lebesguemaß λ_1 und das Diracmaß δ_0 auf \mathbb{R} (versehen mit der σ -Algebra der Borel-Mengen oder der σ -Algebra der λ -messbaren Mengen).

In einer Aufgabe wurde für einen Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) und eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+(X)$ ein neues Maß

$$f \cdot \mu(E) := \mu_f(E) = \int_E f \, d\mu$$

konstruiert. Für jede μ -Nullmenge $N \subset X$ gilt dann

$$\mu_f(N) = \int_N f = 0.$$

Also ist jede μ -Nullmenge auch eine μ_f -Nullmenge.

Unter sehr milden Annahmen kann man zeigen, dass die Maße μ_f die einzigen Maße sind, für die alle μ -Nullmengen Maß 0 haben.

Wir sagen, dass ein Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) (oder einfach das Maß μ) σ -endlich ist, wenn es eine Folge von Teilmengen $E_1, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{A}$ gibt, mit $\mu(E_i) < \infty$ für alle i , und so dass $\cup E_i = X$ gilt.

Zum Beispiel ist jedes Radon-Maß, insbesondere das Lebesguemaß auf \mathbb{R}^n ein σ -endliches Maß. Das Zählmaß μ auf einer Menge X ist σ -endlich genau dann, wenn X endlich oder abzählbar ist.

Der folgende Satz ist als Satz von Radon–Nikodym bekannt. Der Beweis mit den uns jetzt zur Verfügung stehenden Mitteln ist möglich aber sehr lang. Einen kurzen Beweis werden Sie in einer Vorlesung über Funktionalanalysis kennenlernen.

SATZ 18.7. Seien μ und ν zwei σ -endliche Maße auf der σ -Algebra \mathcal{A} auf einer Menge X . Ist jede μ -Nullmenge eine ν -Nullmenge, dann

gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+(X)$, so dass $\nu = \mu_f$ gilt. Ferner ist f bis auf eine μ -Nullmenge eindeutig bestimmt.

Wir bemerken nur noch, dass die Annahme der σ -Endlichkeit wichtig ist. Für das Zählmaß μ auf \mathbb{R} ist die einzige μ -Nullmenge die leere Menge. Aber das Lebesgue-Maß lässt sich nicht als $\lambda = \mu_f$ mit irgendeiner Funktion f schreiben (warum?).

19. FLÄCHENFORMEL I

In den nächsten zwei Kapiteln lernen wir die Größe von n -dimensionalen "Flächen" im k -dimensionalen Raum $k \geq n$ zu berechnen. Als Maß benutzen wir das n -dimensionale Hausdorff-Maß. Wir arbeiten aber nicht mit der Definition (Kapitel 11), sondern mit den in Satz 10.1 postulierten (und in Kapitel 11 bewiesenen) Eigenschaften.

Die n -dimensionalen Objekte, die wir in erster Linie messen wollen, sind n -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^k , also Teilmengen, die sich lokal als Bilder von Immersionen schreiben lassen. (Wir stellen uns immer eine Fläche in \mathbb{R}^3 vor.)

19.1. Lineare Algebra. Wir beschreiben zunächst, wie sich das Volumen (das n -dimensionale Hausdorff Maß) unter linearen Abbildungen transformiert. Wie im Fall $k = n$ werden alle Volumina um denselben Faktor verzerrt. Im Fall $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist dieser Faktor

$$|\det(L)| = \sqrt{\det(L^2)} = \sqrt{\det(L^t \cdot L)},$$

wobei L^t hier und weiter die transponierte Abbildung von L bezeichnet. Der letzte Term macht auch Sinn für $k \neq n$ und gibt die richtige Verzerrung wieder:

Lemma 19.1. *Sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ linear. Dann ist für jede Lebesgue-messbare Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ das Bild $L(E)$ eine \mathcal{H}^n -messbare Teilmenge von \mathbb{R}^k und es gilt*

$$\mathcal{H}^n(L(E)) = \sqrt{\det(L^t \cdot L)} \cdot \lambda_n(E).$$

Beweis. Die Messbarkeit ist in Lemma 16.4 gezeigt worden.

Ist $k < n$, so ist \mathcal{H}^n das Null-Maß auf \mathbb{R}^k . Ferner ist in diesem Fall L , also auch $L^t \cdot L$ nicht injektiv, und damit $\sqrt{\det(L^t \cdot L)} = 0$. Die Formel stimmt also in diesem Fall.

Sei nun $k \geq n$. Nach dem Satz über die Singulärwertzerlegung, Lemma 8.4, können wir L darstellen als eine Komposition von $L = Q \cdot I \cdot L_1$, wobei $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear, $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ die kanonische Einbettung

$$I(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

ist und $Q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine orthogonale Abbildung ist.

Nun sind die Abbildungen I und Q abstandserhaltend. Also gilt nach Korollar 10.2, dass $\mathcal{H}^n(L(E)) = \mathcal{H}^n(L_1(E))$ für jede Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$. Damit ergibt sich für jede Lebesgue-messbare Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$\mathcal{H}^n(L(E)) = \mathcal{H}^n(L_1(E)) = \lambda_n(L_1(E)) = |\det(L_1)| \cdot \lambda_n(E) .$$

Weil Q eine orthogonale Matrix ist, gilt aber

$$L^t \cdot L = L_1^t \cdot I^t \cdot Q^t \cdot Q \cdot I \cdot L_1 = L_1^t \cdot L_1$$

und damit die Gleichheit

$$\mathcal{H}^n(L(E)) = \sqrt{\det(L_1^t \cdot L_1)} \cdot \lambda_n(E) = \sqrt{\det(L^t \cdot L)} \cdot \lambda_n(E) .$$

□

Wir besprechen noch zwei Beispiele, die später wichtig werden.

Beispiel 19.1. Sei $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ linear. Dann wird L durch eine $k \times 1$ Matrix, also durch einen Vektor $v \in \mathbb{R}^k$ dargestellt (nämlich $v = L(1)$). Dann ist $L^t \cdot L$ durch die 1×1 Matrix $v^t \cdot v = \|v\|^2$ dargestellt. Also gilt in diesem Fall

$$\sqrt{\det(L^t \cdot L)} = \|v\| = \|L(1)\| .$$

Beispiel 19.2. Wie üblich identifizieren wir \mathbb{R}^n auf kanonische Weise als Teilraum von \mathbb{R}^{n+1} . Sei $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ die lineare Abbildung

$$L(w) = w + \langle w, v \rangle \cdot e_{n+1}$$

Hierbei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$\sqrt{\det(L^t \cdot L)} = \sqrt{1 + \|v\|^2} .$$

Ist $v = 0$, so ist die Aussage klar (warum?).

Sei $v \neq 0$, so wählen wir eine ON-Basis w_1, \dots, w_n von \mathbb{R}^n , so dass $w_1 = \frac{v}{\|v\|}$ gilt. Dann sind die Vektoren $L(w_1), L(w_2), \dots, L(w_n)$ paarweise orthogonal (warum?). Für $i \geq 2$ haben die Vektoren $L(w_i)$ die Norm 1 und die Norm von $L(w_1)$ ist $\sqrt{1 + \|v\|^2}$.

Sei W das von den Vektoren w_1, \dots, w_n erzeugte Parallelotop (das ein gedrehter Einheitswürfel in \mathbb{R}^n ist). Dann ist $L(W)$ ein (gedrehter) Quader in der Hyperebene $L(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Der Quader $L(W)$ hat Seitenlängen $\|L(w_i)\|$ und damit

$$\mathcal{H}^n(L(W)) = \prod_{i=1}^n \|L(w_i)\| = \sqrt{1 + \|v\|^2} .$$

Da $\lambda_n(W) = 1$ ist, folgt die Aussage aus Lemma 19.1

19.2. Flächenformel für Immersionen. Die Herleitung der Transformationsformel für Diffeomorphismen, Satz 16.1 und Korollar 16.2 aus der entsprechenden Formel für bijektive lineare Abbildungen, ergibt, wenn wir sie Wort für Wort übertragen, die folgende *Flächenformel* für Immersionen. (Zur Erinnerung: Eine Abbildung $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt eine *Immersion*, wenn sie stetig differenzierbar ist und die Ableitung in allen Punkten injektiv ist).

SATZ 19.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine injektive Immersion. Dann ist für jede Lebesgue-Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ das Bild $\Phi(E) \subset \mathbb{R}^k$ eine \mathcal{H}^n -messbare Teilmenge und es gilt

$$\mathcal{H}^n(\Phi(E)) = \int_E \sqrt{\det(d\Phi(x)^t \cdot d\Phi(x))} d\lambda_n(x).$$

Auch für jede \mathcal{H}^n -messbare (nicht-negative oder integrierbare) Funktion $f : \Phi(E) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\Phi(E)} f(y) d\mathcal{H}^n(y) = \int_E \sqrt{\det(d\Phi^t(x) \cdot d\Phi(x))} \cdot (f \circ \Phi(x)) d\lambda_n(x).$$

Für uns ist (zumindest vorerst) nur die erste Aussage wichtig, mit der wir das \mathcal{H}^n -Maß von Bildern von Immersionen berechnen können.

Aufgabe: Gehen Sie den Beweis der Transformationsformel für Diffeomorphismen durch und bestätigen Sie, dass sich der Beweis ohne Änderungen auf den Fall von Immersionen überträgt.

19.3. Das Beispiel der Kurven. Für eine differenzierbare Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $s \in (a, b)$ gilt wegen Beispiel 19.1

$$\sqrt{\det(d\gamma(s)^t \cdot d\gamma(s))} = \|d\gamma(s)(1)\| = \|\gamma'(s)\|.$$

Frage: was bedeuten alle Zeichen in der obigen Formel?

Für $n = 1$ lautet die Flächenformel also wie folgt:

Korollar 19.3. Sei $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine injektive \mathcal{C}^1 -Kurve und sei $\gamma'(s) \neq 0$ für alle s . Für jedes Intervall $I \subset (a, b)$ gilt

$$\mathcal{H}^1(\gamma(I)) = \int_I \|\gamma'(t)\| dt.$$

Zum Beispiel rechnen wir nach, dass die *Länge* des Einheitskreises S^1 genau 2π ist. Unter der Länge von S^1 verstehen wir dabei $\mathcal{H}^1(S^1)$. Eine Begründung für die Bezeichnung Länge werden wir im nächsten Kapitel nachliefern.

Der Kreis S^1 ohne den Punkt $p = (1, 0)$ wird durch die injektive Abbildung $\gamma : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(s) = (\cos(s), \sin(s))$

parametrisiert (dies ist eine nicht triviale in Ana I gezeigte Aussage).
 Es gilt $\|\gamma'(s)\| = 1$ für alle s , also ist γ eine Immersion und es folgt

$$\mathcal{H}^1(S^1) = \mathcal{H}^1(S \setminus \{p\}) = \int_{(0,2\pi)} \|\gamma'(s)\| = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi .$$

Aufgabe: Wieso gilt die erste Gleichheit in der obigen Kette?

19.4. Das Beispiel der Graphen. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^1 Funktion. Dann ist die Abbildung $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\Phi(x) := (x, f(x))$$

eine \mathcal{C}^1 Abbildung, die den *Graphen* von f injektiv parametrisiert (d.h. Φ bildet U bijektiv auf den Graphen ab). Die Abbildung Φ hat im Punkt x als Differential die Abbildung

$$d\Phi(x)(v) = (v, df(x)(v)) = (v, \langle \nabla f(x), v \rangle) = (v, 0) + \langle \nabla f(x), v \rangle \cdot e_{n+1} ,$$

wobei $\nabla f(x) = df(x)^t$ den Gradienten von f im Punkte x bezeichnet.
 Mit Beispiel 19.2 gilt also

$$\sqrt{\det d\Phi(x)^t \cdot d\Phi(x)} = \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2} .$$

Aus der Flächenformel schließen wir:

$$\mathcal{H}^n(\Phi(U)) = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2} d\lambda_n(x) .$$

Als Beispiel berechnen wir das Maß der Sphären. Sei $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n -dimensionale Einheitssphäre, also die Menge der Punkte mit Abstand 1 zum Ursprung, also mit Norm 1.

Sei H (die obere Hemisphäre) die Menge der Punkte in \mathbb{S}^n bei denen die letzte Koordinate positiv ist.

Aufgabe: Zeigen Sie $\mathcal{H}^n(H) = \mathcal{H}^n(\bar{H})$ und $2 \cdot \mathcal{H}^n(H) = \mathcal{H}^n(\mathbb{S}^n)$.

Jeden Punkt p aus H können wir eindeutig als $(x, \sqrt{1 - \|x\|^2}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ schreiben. Dabei ist x die orthogonale Projektion von p auf den \mathbb{R}^n (also die ersten n Koordinaten von p) (Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Projektion P auf die ersten n Koordinaten eine Bijektion $P : H \rightarrow B^n = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ induziert).

Damit haben wir H als Graphen der glatten Funktion $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt, wobei $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$.

Nun gilt (Aufgabe: rechnen Sie es nach!):

$$\|\nabla f(x)\|^2 = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|^2} .$$

Also schließen wir:

$$\mathcal{H}^n(H) = \int_{B^n} \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2} d\lambda_n(x) = \int_{B^n} \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} d\lambda_n(x)$$

Wir benutzen Proposition 17.1 und sehen

$$\mathcal{H}^n(\mathbb{S}^n) = 2 \cdot \mathcal{H}^n(H) = 2 \cdot n \cdot \sigma_n \cdot \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-r^2}} dr .$$

Für $n = 2$ finden wir eine Stammfunktion $-\sqrt{1-r^2}$ und damit

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{S}^2) = 4 \cdot \pi \cdot \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 4\pi \cdot (-\sqrt{1-r^2}|_0^1) = 4\pi .$$

Später werden wir eine einfache Beziehung zwischen $\mathcal{H}^n(\mathbb{S}^n)$ und σ_{n+1} herleiten.

20. ALLGEMEINERE FLÄCHENFORMEL

Dieses Kapitel ist nicht klausurrelevant aber hoffentlich hilfreich für das Verständnis.

20.1. Flächenformel für injektive Abbildungen. Wir verallgemeinern die Flächenformel noch zweimal. Wir formulieren die Aussagen nur für Maße (d.h. für den Fall, dass die Funktion f in Satz 19.2 eine charakteristische Funktion ist), aber die Aussage gilt genauso für Integrale. Zuerst lassen wir die Annahme der Immersion fallen, ohne dass sich die Aussage ändert:

SATZ 20.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ injektiv und stetig differenzierbar. Dann ist für jede Lebesgue-messbare Teilmenge $E \subset U$ das Bild $\Phi(E)$ eine \mathcal{H}^n -messbare Teilmenge von \mathbb{R}^k und es gilt*

$$(20.1) \quad \mathcal{H}^n(\Phi(E)) = \int_E \sqrt{\det(d\Phi(x)^t \cdot d\Phi(x))} d\lambda_n(x) .$$

Beweis. Die Messbarkeit ist in Lemma 16.4 gezeigt worden.

Sei K die Menge der Punkte $x \in U$ in denen $d\Phi(x)$ nicht-injektiv ist. Dies ist genau die Menge der Punkte, in denen $\det(d\Phi(x)^t \cdot d\Phi(x)) = 0$ gilt (Hausaufgabe). Insbesondere, ist für $U_0 := U \setminus K$, die Einschränkung $\Phi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine injektive Immersion. Wir können also auf diese Einschränkung Satz 19.2 anwenden. Folglich gilt die Aussage für alle Teilmengen $E \subset U_0$.

Schreiben wir jedes messbare E als $(E \cap K) \cup (E \cap U_0)$ und benutzen wir die Injektivität von Φ , so reduzieren wir die Aussage auf den Fall $E \subset K$ (wie genau?).

Für jede Teilmenge $E \subset K$ steht 0 auf der rechten Seite von (20.1). Damit folgt der Satz aus dem nachfolgenden Lemma 20.2. \square

Das folgende Lemma ist einer der zwei wichtigsten (und einfachsten) Fälle des *Satzes von Sard*, der besagt, dass unter gewissen Annahmen, das Bild einer Menge unter einer (genügend glatten) Abbildung eine Nullmenge ist. Den anderen wichtigsten Spezialfall haben wir als Korollar 10.4 kennengelernt.

Lemma 20.2. *Sei U in \mathbb{R}^n offen und sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung. Sei K die Menge aller Punkte in U , für die $d\Phi(x)$ nicht injektiv ist. Dann gilt $\mathcal{H}^n(\Phi(K)) = 0$.*

Beweis. Wir schreiben U als eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen K_i (z.B. Quader). Es reicht zu zeigen, dass $\Phi(K \cap K_i)$ für alle i eine \mathcal{H}^n -Nullmenge ist. Also reicht es für jede kompakte Menge $K' \subset K$ zu zeigen, dass $\mathcal{H}^n(\Phi(K')) = 0$.

Wir führen die Aussage auf Satz 19.2 zurück, indem wir die Abbildung Φ durch einen Trick zu einer Immersion machen. Wir erweitern dafür den Bildraum um zusätzliche n Koordinaten. Für $\delta \in \mathbb{R}$ (das wir uns klein und positiv denken) betrachten wir die Abbildung $\Phi_\delta : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+n} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$

$$\Phi_\delta(x) = (\Phi(x), \delta \cdot x) .$$

Die Abbildung Φ_δ ist für jedes $\delta \neq 0$ eine injektive Immersion (warum?).

Sei $P : \mathbb{R}^{k+n} \rightarrow \mathbb{R}^k$ die orthogonale Projektion auf die ersten k Koordinaten. P ist 1-Lipschitz und $\Phi = P \circ \Phi_\delta$. Also

$$\mathcal{H}^n(\Phi(K')) \leq \mathcal{H}^n(\Phi_\delta(K'))$$

für alle δ und es reicht $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}^n(\Phi_\delta(K')) = 0$ zu zeigen. Nach Satz 19.2 gilt aber für alle $\delta \neq 0$

$$\mathcal{H}^n(\Phi_\delta(K')) = \int_{K'} f_\delta(x) d\lambda_n(x) ,$$

wobei $f_\delta(x) = \sqrt{\det(d\Phi_\delta(x)^t \cdot d\Phi_\delta(x))}$.

Nun gibt es ein $C > 0$, so dass für alle $|\delta| \leq 1$ die Abschätzung $f_\delta \leq C$ gilt. Schließlich gilt für jedes $x \in K'$ die Aussage (warum?)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta(x) = 0 .$$

Zusammen ergibt sich mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathcal{H}^n(\Phi_\delta(K'))) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{K'} f_\delta(x) d\lambda_n(x) = 0 .$$

Aufgabe: Füllen Sie die Details in dem letzten Teil des Beweises. \square

20.2. Allgemeine Flächenformel. Die Gleichheit aus 20.1 bleibt auch für nicht injektive Abbildungen bestehen, wenn wir das Maß auf der rechten Seite mit "Multiplizitäten" versehen:

Korollar 20.3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine \mathcal{C}^1 Abbildung. Sei $E \subset U$ Lebesgue-messbar.

Die Multiplizitäts-Funktion $m^E : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty]$ gegeben durch $m^E(y) := \#(\Phi^{-1}(y) \cap E)$ ist \mathcal{H}^n -messbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^k} m^E(y) d\mathcal{H}^n(y) = \int_E \sqrt{\det(d\Phi(x)^t \cdot d\Phi(x))} d\lambda_n(x) .$$

Wir schicken dem Beweis eine Beschreibung der Funktion m^E voraus: Die Funktion m^E ist 0 in $\mathbb{R}^k \setminus \Phi(E)$. Für $y \in \Phi(E)$ nimmt die Funktion m^E einen ganzzahligen Wert oder den Wert ∞ an und sie gibt an, "wie viel Mal der Punkt y von Φ getroffen wird". Für (auf E) injektive Abbildungen Φ ist m^E genau die charakteristische Funktion $\chi_{\Phi(E)}$.

Beweis. Sei $K \subset U$ die Menge der Punkte $x \in U$, in denen $d\Phi(x)$ nicht injektiv ist und sei $U_0 = U \setminus K$. Dann ist die Einschränkung $\Phi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Immersion.

Also hat jeder Punkt $x \in U_0$ eine offene Umgebung U^x , so dass die Einschränkung $\Phi : U^x \rightarrow \mathbb{R}^k$ injektiv ist (Satz über Immersionen aus Analysis II!). Wir finden abzählbar viele U_1, \dots, U_m, \dots unter solchen U^x , die U_0 überdecken (warum?).

Damit können wir E als eine disjunkte Vereinigung $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \dots$ von messbaren Teilmengen schreiben, wobei $E_0 = E \cap K$ und

$$E_i := (E \cap U_i) \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} E_j) ,$$

für $i \geq 1$. Damit gilt $E_0 \subset K$ und $E_i \subset U_i$, für $i \geq 1$. Ferner folgt aus der Definition der Multiplizitäten-Funktion

$$m^E = \sum_{i=0}^{\infty} m^{E_i} .$$

Wegen der Linearität und dem Satz über monotone Konvergenz, brauchen wir den Satz nur für $E = E_0, E = E_1, \dots$ zu zeigen (warum?).

Für $E = E_0$, d.h. für $E \subset K$ steht rechts in der Gleichung 0 nach der Definition von K und links wegen Lemma 20.2.

Für $E = E_1, E = E_2, \dots$ ist $m^E = \chi_{\Phi(E)}$, weil die Einschränkung von Φ auf E in diesem Fall injektiv ist. Also gilt in diesem Fall die Gleichung wegen Satz 20.1. \square

Die Aussage dieses Korollars ist auch für den Fall $k = n$ neu.

Aufgabe: Verifizieren Sie die Formel durch nachrechnen für das Beispiel aus der Aufgabe 4(a) von Blatt 7.

21. UNTERMANNIGFALTIGKEITEN

21.1. **Untermannigfaltigkeiten.** Der folgende wichtige Satz ist in Analysis II bewiesen worden:

SATZ 21.1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine Teilmenge und $n < k$ eine natürliche Zahl. Dann sind äquivalent.*

- (1) *Für alle $x \in M$ existiert eine offene Umgebung O von x in \mathbb{R}^k und ein Diffeomorphismus $\Phi : O \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$, so dass die Gleichheit $\Phi(O \cap M) = U \cap \mathbb{R}^n$ gilt.*
- (2) *Für alle $x \in M$ existiert eine offene Umgebung O von x in \mathbb{R}^k , und eine Submersion $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$, so dass $O \cap M = \Phi^{-1}(y)$ für ein $y \in \mathbb{R}^{k-n}$ gilt.*
- (3) *Für alle $x \in M$ existiert eine offene Umgebung O von x in \mathbb{R}^k , eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine injektive Immersion $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass $\Phi(U) = O \cap M$ und $\Phi^{-1} : O \cap M \rightarrow U$ stetig ist.*

Erfüllt $M \subset \mathbb{R}^k$ die äquivalenten Eigenschaften des obigen Satzes, so heißt M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k .

Alle Abbildungen Φ , die in Satz 21.1 vorkommen sind (nach Definition) stetig differenzierbar. Verlangt man zusätzlich, dass sie von der Klasse \mathcal{C}^k (= k Mal stetig differenzierbar) sind, so sprechen wir von einer Untermannigfaltigkeit der Klasse \mathcal{C}^k . Für $k = \infty$ sprechen wir von glatten Untermannigfaltigkeiten.

Meistens werden Untermannigfaltigkeiten durch Gleichungen beschrieben (genauer gesagt, $n - k$ "unabhängige" Gleichungen, wie in (2)). Satz 21.1 besagt dann, dass wir um jeden Punkt eine Parametrisierung, wie in (3) finden, und dass nach einem "Koordinatenwechsel" wie in (1) unsere Menge um jeden Punkt wie ein linearer Unterraum aussieht.

Erste und wichtigste Beispiele von glatten Untermannigfaltigkeiten sind affine Unterräume, Graphen $\Gamma = (x, \Phi(x))$ (wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ eine glatte Abbildung ist) und Sphären

$$S_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x - p\| = r\}.$$

Aufgabe: Verifizieren Sie, dass die 3 obigen Beispiele Untermannigfaltigkeiten sind. Am besten verifizieren Sie in jedem Fall die Gültigkeit aller drei äquivalenten Bedingungen aus Satz 21.1.

Bemerkung 21.1. Man kann sehen, dass Satz 21.1 auch auf die Fälle $n = k$ und $n = 0$ ausgedehnt werden kann. Um sich nicht in den Formalitäten zu verlieren, ist es einfacher, direkt die Untermannigfaltigkeiten in diesen Dimensionen zu definieren. Eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k ist (nach Definition) eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k .

Eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit M von \mathbb{R}^k ist eine *diskrete* Teilmenge, d.h. eine Teilmenge, für die jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung O von x in \mathbb{R}^k besitzt, so dass $O \cap M = \{x\}$.

Immersionen $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ wie in (3), deren Bild $\Phi(U)$ eine in M offene Teilmenge $V = O \cap M$ ist, heißen *Karten* von M . Mit demselben Wort bezeichnen wir auch die Umkehrungen $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$. Die Teilmenge $\Phi(U) \subset M$ bezeichnen wir als *Kartengebiet*.

Aufgabe: Machen Sie sich klar, dass Karten, die sie in einem Atlas sehen, Karten im Sinne der obigen Definition sind. Um welche Untermannigfaltigkeit von welchem Raum handelt es sich dabei?

Für $n < k$ enthält keine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit M von \mathbb{R}^k eine nicht-leere offene Teilmenge von \mathbb{R}^k (warum?). Untermannigfaltigkeiten können abgeschlossen sein und sind es meistens in den wichtigsten Beispielen. (Aufgabe: geben Sie Beispiele von nicht abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten).

Bemerkung 21.2. Wenn, wie bei der Definition einer Karte und überall später, von *in M offenen Teilmengen* die Rede ist, so sind damit nicht (!) offene Teilmengen aus \mathbb{R}^k gemeint, die in M enthalten sind, sondern Teilmengen $V \subset M$ die offen in dem "Raum M " sind. Das sind also solche Teilmengen $V \subset \mathbb{R}^k$, so dass für jeden Punkt $x \in V$ eine Zahl $r > 0$ existiert, so dass der offenen r -Ball in M um x in der Teilmenge V enthalten ist. Der offene r -Ball um x in M ist die Menge aller Punkte aus M mit Abstand kleiner r zu x , also $B_r(x) \cap M$, wobei $B_r(x)$ den offenen r -Ball in \mathbb{R}^k bezeichnet.

Es ist vermutlich in Analysis II gezeigt worden (und es ist eine sehr gute Aufgabe, dies zu beweisen), dass eine Teilmenge V von M genau dann offen in M ist, wenn es eine in \mathbb{R}^k offene Teilmenge O gibt, für die $V = O \cap M$ gilt.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die offene obere Hemisphäre H , wie am Ende von Kapitel 18 definiert, offen in der Sphäre \mathbb{S}^n ist.

Aufgabe: Jede in einer n -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^k$ offene Teilmenge V ist selbst eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k .

Wir machen noch folgende topologische Beobachtung.

Lemma 21.2. *Jede Untermannigfaltigkeit M von \mathbb{R}^k ist der Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von \mathbb{R}^k . Es gibt eine Folge kompakter Teilmengen $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ mit $M = \cup_i K_i$.*

Beweis. Nehme für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung O_x wie in Satz 21.1 (1). Wähle einen kleinen Ball U_x um x in \mathbb{R}^k , so dass der Abschluß \bar{U}_x in O_x enthalten ist.

Dann gilt $\bar{M} \cap U_x = M \cap U_x$ (Aufgabe: beweisen Sie es!). Setze nun $U = \cup_{x \in M} U_x$. Dann ist U offen und $M = U \cap \bar{M}$ (warum?).

Stelle die offene Menge U als eine Vereinigung $U = \cup \hat{K}_i$ einer aufsteigenden Folge kompakter Teilmengen von \mathbb{R}^k dar (Erinnern Sie sich, wie das funktioniert!). Dann sind $K_i = M \cap \hat{K}_i = \bar{M} \cap \hat{K}_i$ die gesuchten kompakten Teilmengen von M . \square

21.2. Hausdorff-Maß auf Untermannigfaltigkeiten. Sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k . Im Folgenden werden wir sehen, dass das n -dimensionale Hausdorff-Maß "das" natürliche Maß auf M ist. Dieses Maß (als äußeres Maß auf M oder als Maß auf der σ -Algebra der Borel-Mengen von M) wird daher häufig auch als vol_M bezeichnet.

Zunächst stellen wir nach Satz 21.1 fest, dass jeder Punkt $x \in M$ in einem Kartengebiet V enthalten ist. D.h. V ist offen in M und es gibt eine injektive Immersion $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, mit offenem $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V = \Phi(U)$. Mit Hilfe von Lemma 21.2 können wir M durch abzählbar viele solcher Kartengebiete V_i überdecken (wie genau?).

Für jede Borel-Menge $E \subset M$, die in einem Kartengebiet $V_i = \Phi(U_i)$ enthalten ist, ist auch $\Phi^{-1}(E)$ eine Borelmenge in \mathbb{R}^n , und wir können mit der Flächenformel $\mathcal{H}^n(E)$ berechnen.

Für eine beliebige Borel-Menge $E \subset M$ können wir E als eine disjunkte abzählbare Vereinigung $E = \cup E_i$ darstellen, wobei jedes E_i in einem Kartengebiet enthalten ist. Damit berechnen wir (theoretisch und praktisch) auch $\mathcal{H}^n(E) = \sum \mathcal{H}^n(E_i)$.

Die nächsten zwei Propositionen kann man als Grund für die Natürlichkeit des Maßes \mathcal{H}^n auf M ansehen.

Proposition 21.3. *Sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k . Sei K eine kompakte und V eine in M offene nicht-leere Teilmenge. Dann gilt $\mathcal{H}^n(K) < \infty$ und $\mathcal{H}^n(V) > 0$.*

Beweis. Wähle $x \in V$ und eine Karte $\Phi : U \rightarrow V_x$ mit $x \in V_x$. Dann ist $\Phi^{-1}(V \cap V_x)$ eine nicht leere offene Menge in \mathbb{R}^n . Aus der Flächenformel sehen wir $\mathcal{H}^n(V \cap V_x) > 0$. Also gilt auch $\mathcal{H}^n(V) > 0$.

Für jede Karte $\Phi : U \rightarrow M$ und jede kompakte Teilmenge $K' \subset U$ hat wegen der Flächenformel $\Phi(K')$ endliches \mathcal{H}^n -Maß (warum?). Wählen wir für jeden Punkt $p \in U$ eine offene Umgebung U' , deren Abschluß in U enthalten und kompakt ist. Dann ist das Bild $\Phi(U')$ ein Kartengebiet um $\Phi(p)$ mit endlichem \mathcal{H}^n -Maß. Wegen Kompaktheit können wir K durch endlich viele solcher Kartengebiete überdecken (formulieren Sie das Argument aus!). Damit ist K durch endlich viele Teilmengen von endlichem Maß überdeckt, also gilt $\mathcal{H}^n(K) < \infty$. \square

Mit ähnlichen Argumenten lässt sich zeigen, dass jede \mathcal{H}^n -messbare Teilmenge E von M eine Vereinigung einer aufsteigenden Folge kompakter Teilmengen und einer \mathcal{H}^n -Nullmenge ist.

Während es viele Maße auf M gibt, die die Aussagen von Proposition 21.3 erfüllen, ist das Hausdorff-Maß das einzige Maß, das die natürliche Bedingung erfüllt: "kleinere Abstände implizieren kleineres Volumen":

Proposition 21.4. \mathcal{H}^n ist das einzige Maß μ auf der σ -Algebra der Borel-Teilmengen von M , das die folgende Eigenschaft hat:

Für beliebige Borelmengen $B_1 \subset M$ und $B_2 \subset \mathbb{R}^n$ und eine bijektive Abbildung $\Phi : B_1 \rightarrow B_2$ gilt $\mu(B_1) \geq \lambda_n(B_2)$, falls Φ 1-Lipschitz ist, und es gilt $\mu(B_1) \leq \lambda_n(B_1)$, falls Φ^{-1} 1-Lipschitz ist.

Beweis. Das Hausdorff Maß \mathcal{H}^n hat die geforderte Eigenschaft wegen Satz 10.1.

Ist andererseits so ein μ gegeben, so gilt für bijektive L -Lipschitz Abbildungen $\Phi : B_1 \rightarrow B_2$ bzw. $\Phi^{-1} : B_2 \rightarrow B_1$ wie oben dass

$$L^n \cdot \mu(B_1) \geq \lambda_n(B_2) \quad \text{bzw.} \quad L^n \cdot \lambda_n(B_2) \geq \mu(B_1) .$$

Um dies zu sehen, reicht es die Komposition von Φ mit einer Streckung in \mathbb{R}^n um den Faktor L zu betrachten, um damit die Aussage auf den Fall $L = 1$ zurückzuführen.

Wie oben beschrieben, reicht es nach Überdeckung durch Kartengebiete zu zeigen, dass $\mu(E) = \mathcal{H}^n(E)$ für jede Borel-Teilmenge E , die in einem Kartengebiet enthalten ist. Nun erinnern wir uns an den Beweis der Flächenformel und sehen, dass die Herleitung der Flächenformel einzig auf den obigen Ungleichungen für Lipschitz-Abbildungen beruhte. Damit können wir auch $\mu(E)$ mit derselben Flächenformel Satz 19.2 bestimmen. Also gilt $\mu(E) = \mathcal{H}^n(E)$. \square

22. NACHTRAG: SATZ ÜBER IMMERSIONEN UND SUBMERSIONEN

Der folgende Satz wurde schon mehrfach implizit benutzt. Vermutlich ist er in abgewandelter Form in Analysis II vorgekommen.

SATZ 22.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^1 Abbildung. Sei $x \in U$ und $L = d\Phi(x)$.

- Ist L injektiv, so gibt es eine Umgebung V von x , eine Umgebung O von $\Phi(x)$ und einen Diffeomorphismus $\Psi : O \rightarrow \hat{O}$, so dass die Komposition $\Psi \circ \Phi : V \rightarrow \hat{O}$ die Einschränkung einer linearen injektiven Abbildung \hat{L} ist. Insbesondere, ist $\Phi : V \rightarrow O$ eine injektive Immersion.
- Ist L surjektiv, so gibt es eine Umgebung V von x und einen Diffeomorphismus $\Psi : W \rightarrow V$, so dass die Komposition $\Phi \circ \Psi :$

$W \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Einschränkung einer surjektiven linearen Abbildung \hat{L} ist. Insbesondere ist $\Phi(V)$ eine Umgebung von $\Phi(x)$ und Φ eine Submersion auf V .

Die lineare Abbildung \hat{L} kann in beiden Fällen als L gewählt werden. Durch Komposition mit einer weiteren linearen Abbildung kann \hat{L} im ersten Fall als die kanonische Einbettung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^k und im zweiten Fall als kanonische Projektion von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^k gewählt werden.

Beide Fälle (der Satz über Immersionen und der Satz über Submersionen) werden auf den Satz über die inverse Abbildung zurückgeführt:

Im ersten Fall betrachten wir einen linearen Isomorphismus T von \mathbb{R}^{k-n} auf das orthogonale Komplement von $L(\mathbb{R}^n)$ in \mathbb{R}^k . Wir definieren dann $\hat{\Phi} : U \times \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^k$ durch

$$\hat{\Phi}(u, y) = \Phi(u) + T(y) .$$

Nun rechnet man nach, dass die Ableitung $d\hat{\Phi}(x, 0)$ ein Isomorphismus ist. Wendet man den Satz über die inverse Funktion auf $\hat{\Phi}$ an, so erhält man den gewünschten Diffeomorphismus Ψ (als lokales Inverses von $\hat{\Phi}$).

Im zweiten Fall betrachten wir eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ die den Kern von L bijektiv auf \mathbb{R}^{n-k} abbildet. Dann definieren wir $\hat{\Phi} : U \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ als

$$\hat{\Phi}(u) = (\Phi(u), 0) + (0, T(u)) .$$

Wieder rechnen wir nach, dass $d\hat{\Phi}(x)$ bijektiv ist, wenden den Satz über die inverse Abbildung an und erhalten das gesuchte Ψ .

23. LÄNGEN VON KURVEN

Auch dieses Kapitel ist nicht klausurrelevant.

Aufgabe: Stellen Sie sich eine Kurve in der Ebene vor und überlegen Sie sich, wie Sie die Länge der Kurve mit einem starren Lineal bestimmen ("abschätzen") würden.

Nachdem Sie diese Übung absolviert haben sollte Ihnen die folgende Definition sehr natürlich erscheinen.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig (wir nennen γ eine *Kurve*). Wir definieren die Länge $\ell(\gamma)$ von γ als das Supremum der Längen der eingeschriebenen Polygonzüge:

$$\ell(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| : t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{k+1} \in I \right\} .$$

Die Länge $\ell(\gamma)$ hat folgende Eigenschaften (Beweisen Sie es!):

- (1) γ ist konstant genau dann, wenn $\ell(\gamma) = 0$.

- (2) $\ell(\gamma) \geq \|x - y\|$, für alle $x, y \in \gamma(I)$.
- (3) Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein lineares Segment $\gamma(t) = x_0 + t \cdot v$, so gilt $\ell(\gamma) = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$.
- (4) Das lineare Segment ist die einzige Kürzeste Kurve: Jede Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\ell(\gamma) = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$ ist im linearen Segment zwischen $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ enthalten.
- (5) Ist γ eine L -Lipschitz Kurve, so gilt $\ell(\gamma) \leq L \cdot \lambda_1(I)$.
- (6) Die Länge hängt nicht von der Parametrisierung ab: Ist $\phi : J \rightarrow I$ eine stetige Bijektion zwischen zwei Intervallen, so gilt für jede Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Gleichheit $\ell(\gamma) = \ell(\gamma \circ \phi)$.
- (7) Ist $I_1 = [a, b]$, $I_2 = [b, c]$ und $I = [a, c]$ und $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma|_{I_1}) + \ell(\gamma|_{I_2}) .$$

Es sollte beachtet werden, dass die Länge einer Kurve nicht nur vom Bild $\gamma(I)$ abhängt, trotz der Eigenschaft (6). Der Grund ist, dass eine Kurve mehrfach durchlaufen sein kann: der zweifach durchlaufene Kreis hat nach (7) die doppelte Länge des einmal durchlaufenen Kreises (Was heißt es?).

Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die Lipschitz stetig sind, haben eine endliche Länge wegen (5). Allgemeine stetige Kurven $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ können unendliche Länge haben.

Aufgabe: Konstruieren Sie so eine "Zick-Zack" Kurve.

Wir zeigen nun, dass für \mathcal{C}^1 Kurven die Länge genau dem in der Flächenformel erschienenen Ausdruck entspricht (was die Bezeichnung Länge für diesen Ausdruck rechtfertigt):

SATZ 23.1. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 -Kurve. Dann gilt

$$(23.1) \quad \ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Ist γ injektiv, so gilt $\ell(\gamma) = \mathcal{H}^1(\gamma(I))$.

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus (23.1) und der Flächenformel, Korollar 19.3. (Beachten Sie, dass es formal einen kleinen Unterschied zwischen offenen Intervallen in Korollar 19.3 und abgeschlossenen Intervallen hier gibt, und beseitigen Sie diesen!).

Es bleibt (23.1) zu beweisen. Dafür definieren wir für $s \in [a, b]$

$$f(s) := \ell(\gamma|_{[a,s]}) \text{ und } g(s) := \int_a^s \|\gamma'(t)\| dt .$$

Die Funktion g ist \mathcal{C}^1 und es gilt $g'(s) = \|\gamma'(s)\|$ für alle s .

Die Funktion $f(s)$ ist L -Lipschitz stetig, wobei L die Lipschitz Konstante von γ ist (warum?). Ferner gilt $f(a) = g(a) = 0$. Es reicht deswegen $f'(s) = \|\gamma'(s)\|$ für alle $s \in (a, b)$ zu beweisen.

Sei s fest. Dann gilt für $\delta > 0$ wegen der Eigenschaft (7):

$$f(s + \delta) - f(s) = \ell(\gamma|_{[s, s+\delta]}) .$$

Für kleine δ sehen wir aus (2)

$$\ell(\gamma|_{s, s+\delta}) \geq \|\gamma(s + \delta) - \gamma(s)\| = \|\delta \cdot \gamma'(s)\| + o(\delta) ,$$

und aus dem Schrankensatz und aus (5):

$$\ell(\gamma|_{s, s+\delta}) \leq \delta \cdot \max_{t \in [s, s+\delta]} \|\gamma'(t)\| .$$

Lassen wir δ gegen 0 konvergieren, so sehen wir, dass die rechte Ableitung von f an der Stelle s genau $\|\gamma'(s)\|$ ist (Füllen Sie die Details!).

Analog kontrolliert man die linke Ableitung und zeigt damit $f'(s) = \|\gamma'(s)\|$, was den Beweis beendet. \square

Wir beenden dieses Kapitel mit der Bemerkung, dass es keine analogen Resultate in höheren Dimensionen gibt, die z.B. die Oberfläche einer Fläche in \mathbb{R}^3 mit Hilfe der Oberflächen der eingeschriebenen Polyeder berechnen. Lesen Sie das Gegenbeispiel "Schwartz lantern" bei Wikipedia nach; lassen Sie die Rechnungen aus, versuchen Sie nur die Aussage zu verstehen.

Dieses "Problem" war ein weiterer Grund für die Entwicklung der Maß- und Integrationstheorie.

24. KOFLÄCHENFORMEL

Dieses Kapitel, das eine Verallgemeinerung der Sätze von Fubini–Tonelli auf "nicht-rechtwinklige" Koordinaten beschreibt, ist nicht klausur-relevant. Unter anderem sollte aber Integration in Polarkoordinaten in höheren Dimensionen durch dieses Kapitel deutlich klarer werden.

Sei O offen in \mathbb{R}^{n+k} und sei $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Submersion. (Wir denken an zwei Beispiele: Den Fall der orthogonalen Projektion $\mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ und an die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = \|x\|$).

Nach Satz 21.1 ist für jedes $y \in \mathbb{R}^k$ das Urbild $\Phi^{-1}(y) \subset O$ eine (möglicherweise leere) n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+k} . (Was sind diese Urbilder in den zwei obigen Beispielen?). Wir sehen auf O eine Art "Produktstruktur": Die Menge O ist zerlegt in paarweise disjunkte n -dimensionale Teilmengen, die Punkten aus \mathbb{R}^k entsprechen. Man könnte hoffen, dass das Volumen von O in irgendeiner Form das Produkt des Volumens von $\Phi(O)$ und des Volumens "einer typischen Faser" $\Phi^{-1}(y)$ ist.

Für den Fall der Projektion wird es durch den Satz von Tonelli präzesiert. Die Koflächenformel macht auch die entsprechende Aussage im allgemeinen Fall. Die Formel sieht ähnlich aus, es kommt

lediglich ein Verzerrungsfaktor dazu, der bis auf Vertauschung von der Abbildung und ihrer Transponierten genauso wie in der Flächenformel aussieht. Wie in der Flächenformel lässt sich die Aussage auch auf "Nicht-Submersionen" ausdehnen.

SATZ 24.1. Sei $O \in \mathbb{R}^{n+k}$ offen und sei $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar. Sei $f : O \rightarrow [0, \infty]$ Lebesgue messbar. Dann gilt

$$\int_O f(x) \cdot \sqrt{\det(d\Phi(x) \cdot d\Phi^t(x))} d\lambda_{n+k}(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\Phi^{-1}(y)} f(z) d\mathcal{H}^n(z) \right) d\lambda_k(y).$$

Insbesondere gilt für jede messbare Teilmenge $E \subset O$

$$(24.1) \quad \int_E \sqrt{\det(d\Phi(x) \cdot d\Phi^t(x))} d\lambda_{n+k}(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^n(E \cap \Phi^{-1}(y)) d\lambda_k(y)$$

Wir besprechen zwei Beispiele bevor wir den Beweis skizzieren. Ist die Abbildung Φ die orthogonale Projektion $\Phi : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$, so ist der Faktor $\sqrt{\det(d\Phi(x) \cdot d\Phi^t(x))}$ konstant 1. In diesem Fall sind die obigen Formeln genau die Aussagen der Sätze von Tonelli–Cavalieri.

Ist $k = 1$, also Φ eine Funktion $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist der Faktor $\sqrt{\det(d\Phi(x) \cdot d\Phi^t(x))}$ gleich der Norm des Gradienten $\|\nabla\Phi(x)\|$ (Warum ist es so? Vergleiche mit Beispiel 19.1).

Nun hat die Funktion $\Phi(x) = \|x\|$ überall auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ den Gradienten $\nabla\Phi(x) = \frac{x}{\|x\|}$ und dieser hat überall die Norm 1. Da $\{0\}$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^{n+1} ist, erhalten wir die folgende natürlichere Form der "Integration in Polarkoordinaten":

Korollar 24.2. Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x) d\lambda_{n+1}(x) = \int_{(0, \infty)} \left(\int_{S_r(0)} f(z) d\mathcal{H}^n(z) \right) dr,$$

wobei $S_r(0)$ die Sphäre mit Radius r um den Punkt 0 bezeichnet.

Setzen wir im Korollar 24.2 für die Funktion f die charakteristische Funktion des Einheitsballs, so sehen wir

$$\sigma_{n+1} = \lambda_{n+1}(B_1(0)) = \int_{(0,1)} \mathcal{H}^n(S_r(0)) dr.$$

Die Abbildung $F : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n = S_1(0)$ gegeben durch $F(x) = \frac{x}{\|x\|}$ bildet jede der Sphären $S_r(0)$ bijektiv auf \mathbb{S}^n ab. Ferner streckt diese Einschränkung $F : S_r(0) \rightarrow S_1(0)$ alle Abstände genau um den Faktor $\frac{1}{r}$ (warum?). Also gilt wegen Satz 10.1 (3), die Gleichheit

$$\mathcal{H}^n(S_r(0)) = r^n \cdot \mathcal{H}^n(\mathbb{S}^n).$$

Die beiden letzten Gleichungen ergeben zusammen:

$$\sigma_{n+1} = \int_0^1 r^n \cdot \mathcal{H}^n(\mathbb{S}^n) dr = \frac{1}{n+1} \cdot \mathcal{H}^n(\mathbb{S}^n).$$

Aufgabe: Versuchen Sie aus dem obigen Korollar die Aussagen von Propositionen 16.3 und 17.1 abzuleiten. Verstehen Sie, woher die Faktoren r und r^{n-1} in den Formeln auftauchen.

Der Beweis von Satz 24.1 erfolgt sehr ähnlich zum Beweis der Flächenformel in drei Etappen: zuerst für lineare Abbildungen, dann für Submersionen und schließlich für allgemeine \mathcal{C}^1 Abbildungen. Wir lassen den Beweis aus und geben nur einige Hinweise.

Für orthogonale Projektionen ist der Satz genau der Satz von Tonelli-Cavalieri (siehe oben). Den Fall allgemeiner linearer Abbildungen führt man auf den Fall der Projektionen mit Hilfe des Satzes über die Singulärwertzerlegung zurück.

Den Fall der Submersionen führt man auf den linearen Fall zurück, indem man Submersionen durch lineare Abbildungen (Ableitungen in den jeweiligen Punkten) approximiert. Der Startpunkt hier ist der Satz über Submersionen, Satz 22.1.

Zum Beweis des Satzes für allgemeine Φ muss noch gezeigt werden, dass für die Menge E der Punkte $x \in O$ in denen $d\Phi(x)$ nicht surjektiv ist, die rechte Seite von (24.1) verschwindet. Dies ist eine Form des Satzes von Sard, die aber deutlich aufwändiger ist.

Vektoranalysis

25. INTEGRATION VEKTORWERTIGER FUNKTIONEN. MITTELWERTE, SCHWERPUNKT, HARMONISCHE FUNKTIONEN

25.1. Allgemeine Definition. Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Wir sagen, dass eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ integrierbar ist, wenn alle Koordinaten-Funktionen $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar sind. In diesem Fall setzen wir

$$\int f = \int_X f = \int_X f \, d\mu := \left(\int_X f_1 \, d\mu, \int_X f_2 \, d\mu, \dots, \int_X f_n \, d\mu \right) \in \mathbb{R}^n .$$

Es ist nicht schwer (Aufgabe: tun Sie es!) folgende Eigenschaften dieses Integrals herzuleiten:

- (1) Ist $n = 1$, so ist es der Integralbegriff, den wir bis jetzt kannten.
- (2) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und integrierbare $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g .$$

- (3) Die Abbildung f ist integrierbar genau dann, wenn f eine \mathcal{A} -Borel-messbare Abbildung und $\|f\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist.
- (4) Konvergiert eine Folge integrierbarer $f^k : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ punktweise gegen $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ und gibt es ein integrierbares $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $g \geq \|f^k\|$ für alle k , so ist f integrierbar und

$$\int f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f^k .$$

- (5) Ist $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear und ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ integrierbar, so ist $T \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ integrierbar und es gilt

$$\int (T \circ f) = T \left(\int f \right) .$$

Benutzt man (5), so ist es leicht zu sehen, dass die Definition des Integrals $\int f$ für eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ sich nicht ändert, wenn wir eine andere Basis von \mathbb{R}^n wählen. (Die Definition hängt nur von der Vektorraumstruktur von \mathbb{R}^n ab).

Die folgende Behauptung wird in den Hausaufgaben gezeigt:

Lemma 25.1. *Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ integrierbar, so gilt*

$$\left\| \int_X f \, d\mu \right\| \leq \int_X \|f\| \, d\mu .$$

Ein wichtiges Beispiel der vektorwertigen Funktionen (und ihrer Integrale) entsteht in dem Fall des Vektorraums \mathbb{C} der komplexen Zahlen, den wir mit \mathbb{R}^2 identifizieren. Jede komplexwertige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch ihren Real- und Imaginärteil $f = f_1 + i \cdot f_2$, wobei f_1, f_2 reellwertige Funktionen sind. Dann ist

$$\int f = \int f_1 + i \cdot \int f_2 \in \mathbb{C} .$$

25.2. Allgemeine Mittelwerte. Sei wieder (X, \mathcal{A}, μ) ein allgemeiner Maßraum. Ist $E \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(E) < \infty$ und $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine integrierbare Funktion, so nennen wir den *Mittelwert* von f über E den Vektor

$$\int_E f := \frac{1}{\mu(E)} \cdot \int_E f .$$

Damit die Definition (und der Begriff) sinnvoll sind, muss $\mu(E)$ positiv sein!

Hat f die Koordinaten f_1, \dots, f_n , so sind die Koordinaten des Mittelwertes $\int_E f$ genau die Mittelwerte der Koordinaten $\int_E f_i$.

Für eine integrierbare Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ gilt (Zeigen Sie es!):

$$\inf_{x \in E} f(x) \leq \int_E f \leq \sup_{x \in E} f(x) ,$$

eine Eigenschaft, die man vom "Mittelwert" auf jeden Fall erwartet.

Dass die obige Definition tatsächlich der Idee des Mittelwerts entspricht wird am folgenden Beispiel deutlich. Ist μ das Zählmaß und $E = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X$, so gilt für jede Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (warum?):

$$\int_E f = \frac{1}{k} \cdot (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)) .$$

25.3. Schwerpunkt. Sei nun $X = \mathbb{R}^n$ und μ das Lebesgue-Maß $\mu = \lambda$. Für eine messbare Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist der *Schwerpunkt* von E definiert als der Mittelwert über E der Identitätsabbildung $f(x) = x$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$;

$$m(E) := \int_E x \, d\lambda(x) .$$

Nach Definition ist die i -te Koordinate des Schwerpunkts

$$m_i(E) = \frac{1}{\lambda(E)} \cdot \int_E x_i \, d\lambda(x) .$$

In einigen wichtigen Fällen kann man den Schwerpunkt mit Hilfe von Symmetriegründen bestimmen. Zunächst eine wichtige Beobachtung:

Lemma 25.2. *Ist $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein affiner Isomorphismus und $E \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem und endlichem Maß, so gilt $L(m(E)) = m(L(E))$.*

Beweis. Ein affiner Isomorphismus ist eine Komposition eines linearen Isomorphismus und einer Translation. Es reicht, die Aussage zuerst im linearen Fall und dann für eine Translation zu beweisen.

Im linearen Fall benutzen wir die Eigenschaft (5) der vektorwertigen Integrale und sehen:

$$L(m(E)) = \frac{1}{\lambda(E)} \cdot L\left(\int_E x\right) = \frac{1}{\lambda(E)} \cdot \int_E L(x)$$

Für die i -te Koordinate des letzten Integrals gilt nach der Transformationsformel

$$\int_E (L(x))_i d\lambda(x) = \frac{1}{\det(L)} \cdot \int_{L(E)} y_i d\lambda(y) = \frac{1}{\det(L)} \cdot \lambda(L(E)) \cdot m_i(L(E)).$$

Da nach der Transformationsformel $\lambda(L(E)) = \lambda(E) \cdot \det(L)$, ist die i -te Koordinate von $L(m(E))$ gleich $m_i(L(E))$.

Da es für alle i gilt, erhalten wir $L(m(E)) = m(L(E))$.

Die Aussage für eine Translation $L(x) = x + b$, für ein $b \in \mathbb{R}^n$, ergibt sich genauso, indem wir die folgende Identität benutzen

$$\int_E (x + b) = \int_E x + \int_E b = \left(\int_E x\right) + \lambda(E) \cdot b$$

□

Als direkte Folgerung erhalten wir:

Korollar 25.3. *Sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein affiner Isomorphismus. Sei E eine messbare Teilmenge von endlichem positivem Maß, mit $L(E) = E$. Dann wird der Schwerpunkt $m(E)$ von E von der Abbildung L fest gelassen.*

Damit können wir einige (eventuell aus dem Physikunterricht bekannte) Schwerpunkte bestimmen.

Beispiel 25.1. Sei $B = B_r(p) \subset \mathbb{R}^n$ der Ball mit Radius r und Zentrum in p . Der Ball ist invariant unter der Punktspiegelung I an dem Punkt p . Diese Spiegelung ist eine affine Abbildung (sogar eine Isometrie). Also ist der Schwerpunkt $m(B)$ ein Fixpunkt von I . Der einzige Punkt, den I festlässt ist aber p . Also ist der Schwerpunkt von B das Zentrum des Balles B .

Beispiel 25.2. Dasselbe Argument angewendet auf ein Parallelogramm P in \mathbb{R}^2 (oder Parallelotop in \mathbb{R}^n) zeigt, dass der Schwerpunkt von P der Schnittpunkt seiner Diagonalen ist.

Die folgenden zwei Beispiele lassen sich leicht auf beliebige Dimensionen verallgemeinern.

Beispiel 25.3. Ist T ein gleichseitiges Dreieck in \mathbb{R}^2 , so ist T invariant unter den Spiegelungen an den Seitenhalbierenden. Der einzige Punkt, der invariant unter allen drei dieser Spiegelungen ist ist der Durchschnitt der Seitenhalbierenden, der auch als Schwerpunkt des Dreiecks bekannt ist. Sind x, y, z die Eckpunkte dieses Dreiecks T , so ist $m(T) = \frac{1}{3}(x + y + z)$.

Beispiel 25.4. Sei T' ein beliebiges Dreieck in \mathbb{R}^2 . Dann gibt es eine affine Abbildung L , die das gleichseitige Dreieck T auf T' abbildet, siehe Kapitel 9.3. Dann bildet L den Schwerpunkt von T auf den Schwerpunkt von T' ab. Da L Geraden auf Geraden und Mittelpunkte auf Mittelpunkte abbildet, sehen wir, dass auch $m(T')$ der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden von T' ist.

25.4. Harmonische Funktionen. Eine stetige Funktion $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ heißt harmonisch, wenn für alle $x \in O$ und alle $r > 0$, so dass der abgeschlossene Ball $\bar{B}_r(x)$ in O enthalten ist, die folgende Gleichheit gilt

$$f(x) = \int_{\bar{B}_r(x)} f(y) d\lambda(y) .$$

Also der Wert von f in einem Punkt x ist gleich dem Mittelwert von f über jeden Ball mit Zentrum in x .

Die ersten drei der folgenden Eigenschaften sind einfache Aufgaben, die letzten zwei sind etwas anspruchsvoller, werden aber aus einem Satz später folgen.

- Die Menge der auf O harmonischen Funktionen $H(O)$ ist ein Vektorraum.
- Alle konstanten Funktionen sind harmonisch.
- Alle linearen Funktionen sind harmonisch.
- Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist nicht harmonisch.
- Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 - y^2$ ist harmonisch.

Folgende Beobachtung ist nicht klausurrelevant. Sie zeigt, dass eine Funktion harmonisch ist, wenn ihr Wert in jedem Punkt gleich dem Mittelwert über jede Sphäre mit Zentrum in diesem Punkt ist:

Proposition 25.4. *Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetige Funktion $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ ist harmonisch genau dann, wenn für alle $x \in O$ und alle $r > 0$, so dass der abgeschlossene Ball $\bar{B}_r(x)$ in O enthalten ist, die folgende Gleichheit gilt*

$$(25.1) \quad f(x) = \int_{S_r^+(x)} f(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) .$$

Beweis. Sei $x \in O$ fest und r wie oben. Für alle $0 < t < r$ betrachte

$$M(t) := \int_{B_t(x)} f(y) d\lambda(y) \text{ und } N(t) := \int_{S_t(x)} f(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Wegen der Stetigkeit von f sind die Funktionen M und N stetig (Warum? Für M ist das Argument deutlich einfacher als für N !). Wenden wir die Formel über die Integration in Polarkoordinaten und den Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung an, so erhalten wir für alle $0 < t < r$ die Gleichheit $M'(t) = N(t)$.

Die Harmonizität von f bedeutet nun, dass $M(t) = \sigma_n \cdot t^n \cdot f(x)$ für alle $0 < t < r$. Die Bedingung (25.1) bedeutet $N(t) = n \cdot \sigma_n \cdot t^{n-1} \cdot f(x)$.

Also folgt aus der Harmonizität die Bedingung (25.1) durch Ableiten nach t . Ist (25.1) erfüllt, so gilt wegen $\lim_{t \rightarrow 0} M(t) = 0$ die Gleichheit $M(t) = \int_0^t N(s) ds = \sigma_n \cdot t^n \cdot f(x)$. \square

26. VEKTORFELDER

26.1. Definition. Ein Vektorfeld auf einer Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $V : E \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Wir denken uns immer den Vektor $V(x)$ als einen Vektor (parallel zu $V(x)$) der an den Punkt $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ angeheftet ist. Stellen Sie sich ein Bild vor, und machen Sie sich klar, woher die Bezeichnung "Feld" kommt.

Für jedes E können wir von der Stetigkeit eines Vektorfeldes auf E sprechen. Ist E offen, so können wir von glatten Vektorfeldern sprechen.

26.2. Gradientenfelder und Potentialfunktionen. Ist O offen und $V : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, so heißt V ein *Gradientenfeld*, wenn es eine \mathcal{C}^1 -Funktion $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $V = \nabla f$ gilt. In diesem Fall heißt f eine *Potentialfunktion* von V .

In Dimension 1 ist jedes stetige Vektorfeld ein Gradientenfeld, als Folgerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Im Folgenden möchten wir unter Anderem die Frage untersuchen, in wie weit sich der Satz verallgemeinern läßt. Eine Möglichkeit, das exakt zu formulieren, ist die Frage, ob jedes Vektorfeld eine "Stammfunktion" (in unseren Notationen eine Potentialfunktion) besitzt, inwiefern diese eindeutig bestimmt ist, und ob man sie mit Hilfe der Integration bestimmen kann.

Eine Frage läßt sich leicht beantworten. Wie im 1-dimensionalen Fall unterscheiden sich zwei Stammfunktionen höchstens um eine Konstante:

Ist O zusammenhängend, und sind f_1, f_2 zwei Potentialfunktionen des Vektorfeldes V , so ist $f_1 - f_2$ konstant auf O . Dies folgt direkt aus der Aussage $\nabla(f_1 - f_2) = 0$. (Füllen Sie die Details!)

Anders als im 1-dimensionalen Fall hat aber nicht jedes stetige Vektorfeld eine Potentialfunktion. Im Falle von \mathcal{C}^1 Vektorfeldern erhalten wir die folgende notwendige Bedingung. Hier und später bezeichnen wir mit V_i die Koordinaten des Vektorfeldes V .

Lemma 26.1. *Sei $V : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld. Ist V ein Gradientenvektorfeld so gilt für alle $1 \leq i, j \leq n$ die Gleichheit:*

$$(26.1) \quad \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}.$$

Beweis. Ist f eine Potentialfunktion von V , so ist $\nabla f = V$. Für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Also ist f zwei Mal stetig differenzierbar. Nach dem Satz von Schwarz gilt die behauptete Gleichheit. \square

Die Gleichheit (26.1) gilt nicht für folgende Vektorfelder auf \mathbb{R}^2 :

- (1) $V(x_1, x_2) = (x_2, 0)$;
- (2) $V(x_1, x_2) = (2x_2, x_1)$.

Die Gleichheit (26.1) gilt für

- (1) Jedes konstante Vektorfeld $V(x) = v$;
- (2) Für das Vektorfeld $V(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ auf \mathbb{R}^2 ;
- (3) Für das Vektorfeld $V(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$ auf \mathbb{R}^2
- (4) Für das Vektorfeld $V(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot (-x_2, x_1)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Aufgabe: Stellen Sie die Vektorfelder in den obigen Beispielen durch Bilder dar.

Für die ersten 3 Vektorfelder, die die Gleichheit (26.1) erfüllen, kann man mit etwas Mühe die Potentialfunktionen raten:

$$f(x) = \langle v, x \rangle; \quad f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2; \quad f(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Wir werden später sehen, dass das Vektorfeld aus (4) kein Gradientenvektorfeld ist.

26.3. Divergenz und Laplaceoperator. Die Divergenz eines \mathcal{C}^1 Vektorfeldes $V : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $\text{div}(V) : O \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\text{div}(V) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}.$$

Wir werden später eine geometrische Interpretation der Divergenz lernen. Im Moment ist es einfach eine Formel. Wir sehen aus der Definition, dass die Divergenz die *Spur* (die Summe der Diagonaleinträge) der Jacobimatrix von V ist.

Bemerkung 26.1. Da die Spur invariant unter Basiswechseln ist, gilt

$$\operatorname{div}(A^{-1} \circ V \circ A)(x) = \operatorname{div}(V)(A(x)) ,$$

für jede invertierbare lineare Transformation $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und jedes $x \in A^{-1}(O)$. Aufgabe: verstehen Sie was alle Zeichen in der Formel bedeuten, und warum die Formel gilt.

Der in vielen Bereichen der Mathematik und in der Physik wichtige *Laplace-Operator* Δ ordnet einer \mathcal{C}^2 Funktion $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$\Delta f = \Delta(f) := \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\nabla f)_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$$

zu. Nach Definition ist Δf die Spur der *Hessischen Matrix* von f .

Wir merken an, dass alle drei Operatoren $\nabla, \Delta, \operatorname{div}$ linear sind (als Abbildungen zwischen welchen Räumen?).

Die Umkehrung der folgenden Aussage werden wir später beweisen:

Proposition 26.2. *Ist eine \mathcal{C}^2 Funktion $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, dann gilt $\Delta f = 0$.*

Beweis. Wähle $x \in O$ beliebig. Um $\Delta f(x) = 0$ zu beweisen dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x = 0$ annehmen.

Nach Addition einer konstanten Funktion und einer linearen Funktion (die beide harmonisch sind und im Kern des Laplace-Operators liegen) dürfen wir $f(0) = 0$ und $df(0) = 0$ annehmen.

Die Taylorformel um den Punkt 0 besagt nun, dass

$$f(x) - \frac{1}{2} \langle H \cdot x, x \rangle = R(x) ,$$

wobei H die Hessische von f in 0 bezeichnet und der Restterm $R(x)$ die Bedingung erfüllt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{\|x\|^2} = 0 .$$

Wir schließen daraus (wie?):

$$\int_{B_r(0)} R(x) d\lambda_n(x) = o(r^{n+2}) .$$

Wegen der Harmonizität von f gilt für alle Bälle $B_r(0)$ in O die Gleichheit $\int_{B_r(0)} f = 0$. Also schließen wir

$$\int_{B_r(0)} \langle H \cdot x, x \rangle d\lambda_n(x) = o(r^{n+2}) .$$

Wir finden eine ON-Basis w_1, \dots, w_n von H mit Eigenwerten μ_1, \dots, μ_n . Zerlegen wir einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombination bezüglich der ON-Basis w_i , so sehen wir direkt

$$\langle H \cdot x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot \langle x, w_i \rangle^2 .$$

Aus der Invarianz des Balles $B_r(0)$ und des Lebesguemaßes unter Isometrien, sehen wir (wie genau?), dass für jedes i die Gleichheit gilt:

$$\int_{B_r(0)} \langle x, w_i \rangle^2 d\lambda_n(x) = \int_{B_r(0)} \langle x, e_1 \rangle^2 d\lambda_n(x) = \int_{B_r(0)} x_1^2 d\lambda_n(x) .$$

Dasselbe Symmetrieargument zeigt

$$\int_{B_r(0)} \|x\|^2 = \int_{B_r(0)} \sum x_i^2 = n \cdot \int_{B_r(0)} x_1^2 .$$

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} \langle H \cdot x, x \rangle &= \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) \cdot \frac{1}{n} \int_{B_r(0)} \|x\|^2 = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) \cdot n \cdot \sigma_n \cdot \int_0^r s^{n+1} ds = \\ &= \frac{1}{n+2} \cdot \sigma_n \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) \cdot r^{n+2} . \end{aligned}$$

Also impliziert $\int_{B_r(0)} H = o(r^{n+2})$ das Verschwinden der Spur der Hesseschen $\sum_{i=1}^n \mu_i$. Also gilt $\Delta f(0) = 0$. \square

26.4. Fluß eines Vektorfeldes. Dieses Unterkapitel ist nicht klausurrelevant, wird aber wichtig für das Verständnis der geometrischen Bedeutung der Divergenz sein.

Ist $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so induziert V einen eindeutigen *Fluß* $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow O$, wobei \mathcal{D} eine offene Teilmenge von $O \times \mathbb{R}$ ist, die $O \times \{0\}$ enthält. Der Fluß ist folgendermaßen definiert.

Für jeden Punkt $x \in O$ gibt es eine eindeutige maximale Lösung $\gamma = \gamma_x : (a_x, b_x) \rightarrow O$ der Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = V(\gamma(t))$$

mit der Anfangsbedingung $\gamma(0) = x$.

Dies ist der Hauptsatz über die Lösungen von Differentialgleichungen (beachte, dass unser V auch lokal Lipschitz stetig ist!).

Der Definitionsbereich \mathcal{D} des Flußes Φ von V ist dabei die Menge aller Paare (x, t) , so dass die *Integralkurve* γ_x zum Zeitpunkt t definiert ist. D.h. \mathcal{D} ist die Menge aller Paare (x, t) , wobei $t \in (a_x, b_x)$ gilt. Der Fluß $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow O$ wird nun definiert als

$$\Phi(x, t) := \Phi_t(x) := \gamma_x(t) .$$

Folgendes ist auch ein Teil des Hauptsatzes über die Existenz- und Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen (und der Abhängigkeit von den Parametern):

Proposition 26.3. *Unter den obigen Annahmen gilt:*

- *Der Definitionsbereich \mathcal{D} ist offen.*
- *Die Abbildung $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow O$ ist \mathcal{C}^1 .*
- *Für alle t, s gilt immer $\Phi_t(\Phi_s(x)) = \Phi_{t+s}(x)$, wann immer die linke Seite wohldefiniert ist.*
- *Φ_0 ist die Identität.*
- *Die Menge der Punkt $O_t \subset O$ auf denen Φ_t definiert ist, ist offen und $\Phi_t : O_t \rightarrow \Phi_t(O_t)$ ist ein Diffeomorphismus.*

27. KURVENINTEGRALE

Dieses und die nächsten Kapitel bis zum Schluß der Vorlesung können in einer etwas anderen gut verständlichen Darstellung in Kapitel 4 bei [Gri10] nachgelesen werden.

27.1. Integration von Vektorfeldern entlang von Kurven. In diesem Kapitel untersuchen wir die Umkehrbarkeit von Lemma 26.1 und den Zusammenhang mit Integration. Wir beginnen mit dem folgenden Begriff, der Ihnen eventuell aus der Physik als die von einem Kraftfeld (für uns ein Vektorfeld) entlang eines Weges (für uns eine Kurve) verrichtete Arbeit bekannt ist.

Eine *stückweise \mathcal{C}^1 Kurve* ist eine stetige Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, für die es eine Unterteilung $a = t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ gibt, so dass alle Einschränkungen $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ stetig differenzierbar sind.

Ein solche Kurve ist eine Aneinanderhängung (was heißt es formal?) von endlich vielen stetig differenzierbaren Kurven, die aber an den Punkten der Aneinanderhängung einen Knick haben dürfen. Jede solche Kurve hat endliche Länge und ist Lipschitz stetig. Die Ableitung $\gamma'(t)$ ist wohldefiniert und stetig außerhalb einer endlichen Menge von Zeiten t_2, t_3, \dots, t_{k-1} .

Ab jetzt sollen alle Kurven in diesem Kapitel stückweise \mathcal{C}^1 sein.

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow O$ eine stückweise \mathcal{C}^1 Kurve in $O \subset \mathbb{R}^n$ und sei $V : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist die Funktion $f(t) := \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ beschränkt und stetig außerhalb von endlich vielen Punkten. Also ist f integrierbar in $[a, b]$. Wir setzen

$$(27.1) \quad \int_{\gamma} V = \int_{[a,b]} \langle \gamma'(t), V(\gamma(t)) \rangle = \int_a^b \langle \gamma'(t), V(\gamma(t)) \rangle dt$$

und nennen es das *Kurvenintegral* des Vektorfeldes V entlang γ .

Ganz wichtig: dies ist nicht das in Kapitel 25.1 besprochene Integral der vektorwertigen Funktion V , das wir genauso bezeichnet haben. Dort war das Ergebnis ein Vektor in \mathbb{R}^n , hier ist es eine Zahl. Diese Doppeldeutigkeit entsteht nur bei Integration von Vektorfeldern entlang von Kurven; im Zweifelsfall bezeichnet $\int_{\gamma} V$ die Zahl, die wir mit der Formel (27.1) berechnen.

Als Beispiel nehmen wir die Parametrisierung des Einheitskreises $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ und berechnen für das Vektorfeld $V(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(-x_2, x_1)$ das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} V = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin(t), \cos(t)), (-\sin(t), \cos(t)) \rangle dt = 2\pi .$$

Ähnlich wie für die Länge einer Kurve und für die Flächenformel, ist das Kurvenintegral additiv unter Zerlegungen des Definitionsbereichs: für jedes $c \in (a, b)$ gilt:

$$\int_{\gamma} V = \int_{\gamma|_{[a,c]}} V + \int_{\gamma|_{[c,b]}} V .$$

Ferner ändert sich das Kurvenintegral nicht durch eine Umparametrisierung: ist die Abbildung $\eta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ein monoton wachsender Diffeomorphismus, so gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \eta} V &= \int_{[c,d]} \langle V(\gamma \circ \eta(t)), (\gamma \circ \eta)'(t) \rangle = \int_{[c,d]} \langle V(\gamma \circ \eta(t)), \gamma'(\eta(t)) \rangle \cdot \eta'(t) = \\ &= \int_{[a,b]} \langle V(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds = \int_{\gamma} V \end{aligned}$$

nach der Transformationsformel und der Tatsache $\eta' > 0$. Anders (!) als bei der Länge und der Flächenformel ändert das Kurvenintegral das Vorzeichen, wenn bei der Umparametrisierung von γ die Richtung von γ sich ändert. Dieselbe Rechnung zeigt (wie genau?), dass für monoton fallende (!) Diffeomorphismen $\eta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ die Gleichheit gilt

$$\int_{\gamma \circ \eta} V = - \int_{\gamma} V$$

27.2. Konservative Vektorfelder. Die folgende Definition ist der Physik entliehen. Dort werden Kraftfelder als konservativ bezeichnet, wenn die durch dieses Kraftfeld verrichtete Arbeit entlang jeder *geschlossenen* Kurve verschwindet. Wir werden gleich sehen, dass wir solche Felder bereits unter einem anderen Namen kennen.

Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt. Wir nennen ein Vektorfeld $V : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ *konservativ*, wenn für jede geschlossene stückweise C^1 -Kurve γ gilt

$$\int_{\gamma} V = 0 .$$

Wir können nun eine im vorigen Kapitel formulierte Frage nach der Existenz der "Stammfunktion" beantworten:

SATZ 27.1. *Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Ein stetiges Vektorfeld $V : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist konservativ genau dann, wenn es das Gradientenvektorfeld einer C^1 Funktion $u : O \rightarrow \mathbb{R}$ ist.*

In diesem Fall erhält man eine Potentialfunktion u von V wie folgt: Wir wählen einen beliebigen Punkt $x_0 \in O$ und für jedes $x \in O$ eine beliebige stückweise C^1 Kurve $\gamma_x : [a, b] \rightarrow O$ mit $\gamma_x(a) = x_0$ und $\gamma_x(b) = x$. Dann ist $u(x) := \int_{\gamma_x} V$ eine Potentialfunktion von V .

Dem Beweis des Satzes schicken wir eine wichtige topologische Beobachtung voraus, die Sie eventuell aus Analysis II kennen:

Lemma 27.2. *Eine offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend genau dann, wenn für alle $x, y \in O$ es eine stückweise C^1 -Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow O$ gibt mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.*

Beweis. Sei O nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei disjunkte, offene, nicht-leere Teilmengen O_1, O_2 von O , so dass $O = O_1 \cup O_2$. Wähle $x \in O_1$ und $y \in O_2$ beliebig. Wenn es eine stetige Kurve (insbesondere, wenn es eine stückweise C^1 -Kurve) $\gamma : [a, b] \rightarrow O$ gäbe, mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$, dann wären $U_1 := \gamma^{-1}(O_1)$ und $U_2 := \gamma^{-1}(O_2)$ offene disjunkte Mengen im Intervall $[a, b]$ mit $[a, b] = U_1 \cup U_2$. Da $a \in U_1$ und $b \in U_2$ wären U_1 und U_2 nicht-leer und deswegen $[a, b]$ nicht zusammenhängend. Ein Widerspruch.

Sei umgekehrt O zusammenhängend. Seien $x, y \in O$ beliebig. Betrachte die Menge O_x aller Punkte, die sich mit x durch eine stückweise C^1 -Kurve verbinden lassen. Wir müssen $y \in O_x$ beweisen. Dafür zeigen wir, dass O_x offen und das Komplement $O \setminus O_x$ offen sind. Da O_x nicht-leer ist, würde daraus $O_x = O$ folgen, weil O zusammenhängend ist.

Ist nun $z \in O_x$ so wähle einen Ball $B_r(z)$, der in O liegt. Jeder Punkt \hat{z} aus $B_r(z)$ kann mit z durch ein lineares Segment verbunden

werden. Hängen wir an eine stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow O$, die x mit z verbindet, das lineare Segment $\eta : [b, \hat{b}] \rightarrow B_r(z)$ zwischen z und \hat{z} an (was heißt das?), so erhalten wir eine \mathcal{C}^1 -Kurve $\hat{\gamma} : [a, \hat{b}] \rightarrow O$, die x mit \hat{z} verbindet. Also liegt $B_r(z)$ in O_x und damit ist O_x offen.

Genauso zeigt man, dass wenn $B_r(z) \in O$ und ein Punkt $\hat{z} \in B_r(z)$ in O_x liegt, dass auch z in O_x liegen muss. Also ist auch $O \setminus O_x$ offen und das Lemma ist bewiesen. \square

Nun können wir Satz 27.1 beweisen:

Beweis. Sei zunächst $u : O \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^1 Potentialfunktion von V , also $\nabla u = V$. Dann gilt für jede stückweise \mathcal{C}^1 Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow O$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} V &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \nabla u(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \\ &= \int_a^b du(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt = \int_a^b (u(\gamma(t)))' dt = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Ist γ geschlossen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt, dass das Integral verschwindet. Dies zeigt, dass jedes Gradientenvektorfeld konservativ ist.

Sei nun das Vektorfeld V konservativ. Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow O$ und $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow O$ zwei stückweise \mathcal{C}^1 -Kurven mit denselben Anfangs- und Endpunkten $x = \gamma_i(a_i)$ und $y = \gamma_i(b_i)$. Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} V = \int_{\gamma_2} V.$$

Um dies einzusehen, setzen wir die Kurve γ_1 und die umgekehrt durchlaufene Kurve γ_2 zusammen zu einer geschlossenen Kurve und benutzen, dass das Integral von V entlang dieser Kurve verschwindet. Etwas genauer, nehmen wir einen monoton wachsenden Diffeomorphismus $\eta_1 : [0, 1] \rightarrow [a_1, b_1]$ und einen monoton fallenden Diffeomorphismus $\eta_2 : [1, 2] \rightarrow [a_2, b_2]$. Wir setzen $\hat{\gamma}_1 = \gamma_1 \circ \eta_1$ und $\hat{\gamma}_2 = \gamma_2 \circ \eta_2$. Dann gilt

$$\int_{\hat{\gamma}_1} V = \int_{\gamma_1} V \text{ und } \int_{\hat{\gamma}_2} V = - \int_{\gamma_2} V.$$

Ferner ist die Kurve $\hat{\gamma} : [0, 2] \rightarrow O$, die auf $[0, 1]$ mit $\hat{\gamma}_1$ und auf $[1, 2]$ mit $\hat{\gamma}_2$ übereinstimmt eine geschlossene stückweise \mathcal{C}^1 Kurve. Also folgt

$$0 = \int_{\hat{\gamma}} V = \int_{\hat{\gamma}_1} V + \int_{\hat{\gamma}_2} V$$

und damit die Behauptung.

Wir wählen ein festes x_0 . Für jedes $x \in O$ gibt es nach Lemma 27.2 eine stückweise \mathcal{C}^1 Kurve γ_x , die x_0 mit x verbindet. Nach der obigen Beobachtung, hängt $u(x) := \int_{\gamma_x} V$ nicht von der Wahl von γ_x ab.

Wir brauchen nur noch $\nabla u = V$ zu beweisen. Da V stetig ist, reicht es zu zeigen, dass für jedes $x \in O$ die Gleichheit $\partial_i u(x) = V_i(x)$ gilt (welcher Satz aus Ana II wird hier benutzt?).

Wähle ein festes $x \in O$ und eine beliebige Kurve $\gamma_x : [a, b] \rightarrow O$, die x mit x_0 verbindet. Für ein kleines $\epsilon > 0$ betrachte das lineare Segment $\eta : [b - \epsilon, b + \epsilon] \rightarrow O$ gegeben als $\eta(t) = x + (t - b) \cdot e_i$. Für jedes $s \in [-\epsilon, \epsilon]$ ist die Aneinanderhängung γ^s von γ_x und $\eta^s := \eta|_{[b, b+s]}$ eine stückweise \mathcal{C}^1 Kurve, die x_0 mit $x + s \cdot e_i$ verbindet. Also gilt

$$\begin{aligned} u(x + se_i) - u(x) &= \int_{\gamma^s} V - \int_{\gamma_x} V = \left(\int_{\gamma_x} V + \int_{\eta^s} V \right) - \int_{\gamma_x} V = \int_{\eta^s} V = \\ &= \int_b^{b+s} \langle V(\eta^s(t)), (\eta^s)'(t) \rangle dt = \int_b^{b+s} \langle V(\eta^s(t)), e_i \rangle dt = \int_0^s V_i(x + t \cdot e_i) dt. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von V_i folgt nun (wie genau?)

$$\partial_i u(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x + se_i) - u(x)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \cdot \int_0^s V_i(x + t \cdot e_i) \right) = V_i(x).$$

Dies beendet den Beweis des Satzes. \square

Aus dem Satz und dem in Kapitel 27.1 betrachteten Beispiel folgt, dass sich Lemma 26.1 nicht umkehren lässt. Das dort betrachtete Vektorfeld $V(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot (-x_2, x_1)$ ist nicht konservativ, aber es erfüllt (26.1). Damit kann dieses Vektorfeld keine Potentialfunktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ besitzen. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass dies nur wegen des "Lochs" in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ passiert, und dass dieses Vektorfeld V auf "großen" Teilmengen von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Potentialfunktionen besitzt.

28. GRADIENTENVEKTORFELDER UND HOMOTOPE KURVEN

28.1. Sternförmige Gebiete. Wir sagen, dass eine Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ *sternförmig bezüglich eines Punktes* $p \in O$ ist, wenn für jeden Punkt $q \in O$ das lineare Segment $[p, q]$ in O enthalten ist. Wir nennen O *sternförmig*, wenn es sternförmig bezüglich eines Punktes $p \in O$ ist.

Jede sternförmige Teilmenge ist zusammenhängend. Eine Teilmenge O ist konvex, genau dann, wenn sie sternförmig bezüglich jedes Punktes $p \in O$ ist. Der *punktierte Raum* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig. Der *geschlitzte Raum* $\mathbb{R}^n \setminus [0, \infty)$, das Komplement von einem Strahl, ist sternförmig. (Aufgabe: verifizieren Sie die obigen Aussagen).

In einem sternförmigen Gebiet lässt sich Lemma 26.1 umkehren:

Proposition 28.1. Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ eine offene sternförmige Teilmenge. Ein C^1 -Vektorfeld $V : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein Gradientenvektorfeld genau dann, wenn es die Bedingung (26.1) erfüllt.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung haben wir bereits in Lemma 26.1 festgestellt.

Möge nun V die Bedingung (26.1) erfüllen. Also ist in jedem Punkt $q \in O$ die Ableitung $dV(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ symmetrisch.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass O sternförmig bezüglich $p = 0$ ist. Wenn es eine Potentialfunktion u von V gibt, so gibt es auch eine solche Potentialfunktion u mit $u(0) = 0$. Für diese muss dann nach Satz 27.1 für jeden Punkt $x \in O$ und jede Kurve γ_x von 0 nach x die Gleichheit $u(x) = \int_{\gamma_x} V$ gelten. Zur Definition von u wählen wir als γ_x das lineare Segment $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow O$ gegeben durch $\gamma_x(t) = t \cdot x$. Wir betrachten den einzigen als Potentialfunktion in Frage kommenden Kandidaten:

$$u(x) := \int_{\gamma_x} V = \int_0^1 \langle V(t \cdot x), x \rangle dt .$$

Wir müssen nun beweisen, dass $\nabla u = V$ ist. Wegen der Stetigkeit von V reicht es für jedes $w \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} u(x + sw) = \langle V(x), w \rangle$$

zu beweisen. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} u(x + sw) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \int_0^1 \langle V(t(x + sw)), x + sw \rangle dt = \\ &= \int_0^1 \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \langle V(t(x + sw)), x + sw \rangle dt . \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit, die Vertauschung von Integration und Ableitung folgern wir hierbei aus dem Satz über majorisierte Konvergenz (Füllen Sie die Details!). Den Integrand formen wir um:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \langle V(t(x + sw)), x + sw \rangle &= \langle V(tx), w \rangle + \langle dV(tx)(tw), x \rangle = \\ &= \langle V(tx), w \rangle + \langle t \cdot dV(tx)(x), w \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} (t \cdot V(tx)), w \right\rangle . \end{aligned}$$

Frage: wo wurde die Bedingung (26.1) in der obigen Umformung benutzt? Mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung sehen

wir nun:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} u(x + sw) &= \int_0^1 \left\langle \frac{d}{dt} (t \cdot V(tx)), w \right\rangle dt = \\ &= \langle V(x), w \rangle - 0 \cdot \langle V(0), w \rangle = \langle V(x), w \rangle. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. \square

28.2. Ein Beispiel. Schauen wir uns nun das Beispiel der punktierten Ebene U und des Vektorfeldes $V(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot (-x_2, x_1)$ nochmal an. Wir können U darstellen als Vereinigung $U = U^+ \cup U^-$, wobei U^\pm die geschlitzten Ebenen $U^+ = \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty)$ und $U^- = \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]$ sind.

Die Teilmengen U^+, U^- von U sind sternförmig. Also muss es auf diesen Teilmengen Potentialfunktionen u^\pm von V geben. Erstaunlicherweise kann man u^+ und u^- nicht zu einer Potentialfunktion auf ganz u zusammensetzen.

Wir rechnen u^- aus. Dafür wählen wir $x_0 = (1, 0)$ und bestimmen die einzige Potentialfunktion u^- auf U^- , mit $u^-(x_0) = 0$ durch Satz 27.1. Um $u^-(x)$ auszurechnen, wählen wir einen Weg γ_x von x_0 zu x und bestimmen $\int_{\gamma_x} V$. Wir wählen den Weg γ_x nicht als lineares Segment, sondern als Aneinandersetzung des Stückes des Einheitskreises $\gamma : [0, \phi] \rightarrow S^1$, der x_0 mit $\frac{x}{\|x\|}$ verbindet und eines Stückes η des radialen Strahles, der $\frac{x}{\|x\|}$ mit x verbindet.

Nun ist $\eta'(t)$ in jedem Punkt t ein Vielfaches von $\eta(t)$. Aber $V(x)$ ist orthogonal zu x für jedes x . Also verschwindet $\int_\eta V$. Folglich gilt

$$\int_{\gamma_x} V = \int_\gamma V$$

Wir parametrisieren γ als $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, wobei $\phi(x) \in (-\pi, \pi)$ das eindeutige *Argument* von x ist. Dann gilt

$$u^-(x) = \int_\gamma V = \int_0^{\phi(x)} \langle V(\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle dt = \int_0^{\phi(x)} 1 dt = \phi(x).$$

Nun kann man auch direkt einsehen, warum es keine Potentialfunktion u von V auf ganz U geben kann (wie denn?).

28.3. Lokale Konsequenzen für allgemeine offene Mengen. Die nächsten 3 Unterkapitel sind wichtig aber nicht klausurrelevant.

Sei die offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ nicht sternförmig und sei $V : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^2 Vektorfeld, das die Bedingung (26.1) erfüllt. Für jeden Punkt $x \in O$ gibt es Bälle $B_r(x)$, die in O enthalten sind. Auf jedem solchen Ball besitzt V eine Potentialfunktion nach der obigen Proposition.

Wir können nun zeigen, dass das Kurvenintegral entlang "genügend naher Kurven" nur von den Endpunkten der Kurven abhängt. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow O$ eine stückweise C^1 Kurve. Dann ist das Bild $\Gamma = \gamma([a, b])$ kompakt und deswegen finden wir ein $\epsilon > 0$, so dass für jedes $t \in [a, b]$ der Ball $B_\epsilon(\gamma(t))$ in O liegt.

Lemma 28.2. *Sei $V : O \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma : [a, b] \rightarrow O$ und $\epsilon > 0$ wie oben gewählt. Ist $\eta : [a, b] \rightarrow O$ eine Kurve mit denselben Anfangs- und Endpunkten wie γ und gilt $\|\gamma(t) - \eta(t)\| < \epsilon$ für alle $t \in [a, b]$, so gilt*

$$\int_\gamma V = \int_\eta V.$$

Beweis. Betrachte für $s \in [a, b]$ die Funktion

$$f(s) = \int_{\gamma^s} V - \int_{\eta^s} V,$$

wobei γ^s und η^s die Einschränkungen von γ und η auf das Intervall $[a, s]$ bezeichnen.

Dann gilt $f(a) = 0$ und wir möchten $f(b) = 0$ beweisen. Wir nennen dafür einen Zeitpunkt $s \in [a, b]$ *gut*, wenn Folgendes gilt. Für eine (und damit jede) Potentialfunktion u_s von V auf dem Ball $B_\epsilon(\gamma(s))$ gilt

$$f(s) = u_s(\gamma(s)) - u_s(\eta(s)).$$

Der Zeitpunkt $s = a$ ist gut und wir müssen nur zeigen, dass $s = b$ auch gut ist. Dies folgt, wenn wir gezeigt haben, dass die Menge $G \subset [a, b]$ der guten Punkte offen und abgeschlossen in $[a, b]$ ist.

Sei $s \in [a, b]$. Wir finden ein $\delta > 0$, so dass $\gamma(t), \eta(t) \in B_\epsilon(\gamma(s))$ für alle $t \in [a, b]$ mit $|t - s| < \delta$. Bezeichnet nun u_s eine Potentialfunktion von V auf diesem Ball $B_\epsilon(\gamma(s))$, so gilt für alle solchen t

$$\begin{aligned} f(t) &= f(s) + \left(\int_{\gamma^t} V - \int_{\gamma^s} V \right) - \left(\int_{\eta^t} V - \int_{\eta^s} V \right) = \\ &= f(s) + (u_s(\gamma(t)) - u_s(\gamma(s)) - (u_s(\eta(t)) - u_s(\eta(s))). \end{aligned}$$

Weil $B_\epsilon(\gamma(s)) \cap B_\epsilon(\gamma(t))$ konvex und deswegen zusammenhängend ist, stimmen u_s und u_t auf diesem Durchschnitt bis auf eine Konstante überein. Also gilt $u_s(\gamma(t)) - u_s(\eta(t)) = u_t(\gamma(t)) - u_t(\eta(t))$ und

$$f(t) = f(s) - (u_s(\gamma(s)) - u_s(\eta(s))) + (u_t(\gamma(t)) - u_t(\eta(t))).$$

Also ist t gut genau dann, wenn s gut ist. Daraus ergibt sich die Offenheit und Abgeschlossenheit von G in $[a, b]$. Dies beendet den Beweis. \square

28.4. Homotope Kurven und einfachzusammenhängende Mengen. Die nachfolgende Idee ist leicht erklärt. Sei V nach wie vor ein Vektorfeld auf O , das die Bedingung (26.1) erfüllt. Lemma 28.2 besagt, dass das Kurvenintegral von V entlang aller Kurven "nah" an einer gegebenen Kurve (mit den selben Anfangs- und Endpunkten) denselben Wert annimmt. Wenn wir die Menge aller (stückweise C^1) Kurven mit gegebenen Anfangs- und Endpunkten x und y als einen "Raum" $\mathcal{K}_{x,y}$ auffassen, so besagt Lemma 28.2, dass die Abbildung $I : \mathcal{K}_{x,y} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$I(\gamma) = \int_{\gamma} V$$

lokal konstant ist, also konstant in der Nähe jedes Weges ist. Um zu schließen, dass I konstant ist, möchten wir ein Zusammenhangsargument verwenden. Wir wollen zeigen, dass das Kurvenintegral auf zwei Wegen gleich ist, wenn ein Weg stetig in den anderen deformiert werden kann.

Der folgende Begriff (und seine Verallgemeinerungen) ist fundamental in allen Bereichen der Geometrie und Topologie.

Zwei stetige Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow O$ mit denselben Anfangs- und Endpunkten $x = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $y = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ heißen *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow O$ gibt (eine *Homotopie* zwischen γ_0 und γ_1), so dass

- $H(0, t) = \gamma_0(t)$ und $H(1, t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a, b]$.
- $H(s, a) = x$ und $H(s, b) = y$ für alle $s \in [0, 1]$.

Liegt zum Beispiel für jedes t die Strecke $[\gamma_0(t), \gamma_1(t)]$ in O , so sind γ_0 und γ_1 homotop. Eine Homotopie erhalten wir durch

$$H(s, t) = (1 - s) \cdot \gamma_0(t) + s \cdot \gamma_1(t) .$$

Insbesondere, sind für konvexes O je zwei Kurven mit denselben Anfangs- und Endpunkten homotop.

Ist O sternförmig bezüglich p , so ist jede Kurve mit Anfangs- und Endpunkt in p homotop zur konstanten Kurve. Daraus kann man (mit ein wenig Mühe) zeigen, dass auch in einem sternförmigen Gebiet je zwei Wege mit denselben Anfangs- und Endpunkten homotop sind.

Wir nennen eine Teilmenge O von \mathbb{R}^n (allgemeiner einen metrischen Raum) *einfach zusammenhängend*, wenn je zwei Punkte x, y aus O durch eine Kurve verbunden sind und jedes Paar solcher Kurven homotop ist.

Die Bedingung ist also, dass es bis auf stetige Deformationen genau eine Kurve zwischen je zwei Punkten gibt. Wie wir oben gesehen haben, sind konvexe und sternförmige Teilmengen einfach zusammenhängend.

In der punktierten Ebene $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gibt es zwischen dem Punkt $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ mindestens zwei Kurven, die sich scheinbar nicht ineinander überführen lassen: man kann das Loch $\{0\}$ oben oder unten umlaufen. Der Nachweis, dass solche Kurven (z.B. der obere und der untere Halbkreis) nicht homotop sind, ist nicht-trivial und erfordert Einiges an Technik. Wir werden es im nächsten Teilkapitel sehen.

Andererseits ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend (Hausaufgabe).

Noch vier Bemerkungen:

1) Die Bedingung, dass O zusammenhängend ist, kann man als Bedingung interpretieren, dass in dem Raum der Kurven

$$\mathcal{K}_{x,y} := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow O \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$$

je zwei Punkte $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{K}_{x,y}$ in $\mathcal{K}_{x,y}$ durch einen Weg γ_t verbunden sind, also (siehe Lemma 27.2), der Raum $\mathcal{K}_{x,y}$ zusammenhängend ist.

2) Ist $F : O \rightarrow U$ ein Homöomorphismus, so ist O einfach zusammenhängend, wenn es für U zutrifft (Warum?).

3) Als Folgerung des so genannten Riemannschen Abbildungssatzes, am Ende der Vorlesung Funktionentheorie, werden Sie sehen, dass für offene Teilmengen O in \mathbb{R}^2 auch die Umkehrung gilt: Ist eine offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend, so ist sie diffeomorph (insbesondere homöomorph) zur Kreisscheibe $B_1(0)$.

4) Homotopien, einfach zusammenhängende Räume, die "Anzahl" der Löcher, die "verhindern", dass ein Raum einfach zusammenhängend ist und Verallgemeinerungen dieser Begriffe sind der Gegenstand der Topologie-Vorlesung.

28.5. Kurvenintegrale entlang homotoper Kurven. Wir können nun das lokale Lemma 28.2 globalisieren:

Proposition 28.3. *Sei V ein \mathcal{C}^1 Vektorfeld auf O , das (26.1) erfüllt. Sind zwei stückweise \mathcal{C}^1 Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow O$ homotop in O , so gilt*

$$\int_{\gamma_0} V = \int_{\gamma_1} V .$$

Bevor wir zum Beweis kommen besprechen wir das wichtige

Korollar 28.4. *Ist eine offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend, so ist jedes Vektorfeld V , das die Bedingung (26.1) erfüllt ein Gradientenvektorfeld.*

Beweis. Da jede geschlossene stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve γ in O homotop zur konstanten Kurve γ_0 ist, gilt nach Proposition 28.3,

$$\int_{\gamma} V = \int_{\gamma_0} V = 0 .$$

Die Aussage folgt nun aus Satz 27.1. □

Dieses Korollar und das oben besprochene Beispiel zeigen (wie?):

Korollar 28.5. *Die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.*

Schließlich kommen wir zum

Beweis. [Beweis von Proposition 28.3] Sei $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow O$ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 . Wegen Kompaktheit finden wir $\epsilon > 0$, so dass der ϵ -Ball um jeden Punkt aus dem Bild von H in O liegt.

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von H finden wir ein $\delta > 0$, so dass wenn $\|(s, t) - (s_1, t_1)\| < \delta$, die Bildpunkte $H(s, t)$ und $H(s_1, t_1)$ Abstand kleiner als $\frac{\epsilon}{5}$ voneinander haben.

Betrachte Zeiten $0 = s_1 < s_2 < \dots < s_k = 1$, so dass $|s_{i+1} - s_i| < \delta$, für $i = 1, \dots, k - 1$. Dann liegen je zwei aufeinander folgende Kurven $\gamma_{s_i}(t) = H(s_i, t)$ nah beieinander:

$$\|\gamma_{s_{i+1}}(t) - \gamma_{s_i}(t)\| < \frac{\epsilon}{5},$$

für alle $t \in [a, b]$ und alle $1 \leq i \leq k - 1$.

Wären alle γ_{s_i} stückweise \mathcal{C}^1 so würde durch induktive Anwendung von Lemma 28.2 folgen

$$\int_{\gamma_0} V = \int_{\gamma_{s_1}} V = \dots = \int_{\gamma_{s_{k-1}}} V = \int_{\gamma_1} V.$$

Sind die Kurven γ_{s_i} nicht unbedingt stückweise \mathcal{C}^1 , so behelfen wir uns, indem wir die Kurven γ_{s_i} durch Polygonzüge approximieren: Wir wählen eine Unterteilung $a = t_1 < t_2 < \dots < t_l = b$, so dass $|t_{j+1} - t_j| < \delta$ für all $1 \leq j \leq l - 1$ gilt. Dann ersetzen wir γ_{s_i} für $i = 2, \dots, k - 1$ durch $\eta_i : [a, b] \rightarrow O$, das wir stückweise linear wie folgt definieren:

Die Kurve η_i erfüllt $\eta_i(t_j) = \gamma_{s_i}(t_j)$ und auf den Intervallen $[t_j, t_{j+1}]$ ist η_i ein lineares Segment.

Aufgabe: machen Sie ein Bild!

Wir sehen nun mit der Dreiecksungleichung, dass $\|\gamma_{s_i}(t) - \eta_i(t)\| < \frac{2\epsilon}{5}$ für alle $t \in [a, b]$ und alle $i = 2, \dots, k - 1$ gilt. Wenden wir die Dreiecksungleichung nochmal an, so sehen wir, dass

$$\|\gamma_0(t) - \eta_2(t)\| < \epsilon; \|\eta_{k-1}(t) - \gamma_1(t)\| < \epsilon; \|\eta_{i+1}(t) - \eta_i(t)\| < \epsilon,$$

für alle $t \in [a, b]$. Wie vorher folgern wir aus Lemma 28.2:

$$\int_{\gamma_0} V = \int_{\eta_2} V = \dots = \int_{\gamma_1} V.$$

□

29. DIVERGENZ GEOMETRISCH BETRACHTET

29.1. Divergenz und Volumenverzerrung. Sei wieder $V : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$. Sei $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow O$ der Fluß $\Phi(t, x) = \Phi_t(x)$ des Vektorfeldes V , wie in Proposition 26.3 beschrieben. Wir stellen uns V als Geschwindigkeitsfeld des Windes vor und $\Phi(t, x)$ als Wind, der in der Zeit t das Luftmolekül von x nach $\Phi(t, x)$ befördert.

Auf dem Definitionsbereich $O_t \subset O$ von Φ_t muss der Diffeomorphismus $\Phi_t : O_t \rightarrow \Phi(O_t)$ das Volumen nicht unbedingt erhalten.

Nach der Transformationsformel gilt für jedes messbare $E \subset O_t$

$$\lambda_n(\Phi_t(E)) = \int_E |\det(d\Phi_t(x))|.$$

Beachte, dass in dieser Formel $d\Phi_t$ die Ableitung des Diffeomorphismus $\Phi_t(x)$ nach x nicht nach t bedeutet! Die "Zeit" t wird also hier zunächst festgehalten.

Aus der Stetigkeit von $\det(d\Phi_t(x))$ in t , der Aussage, dass diese Determinante nirgends verschwindet und $\det(d\Phi_0(x)) = 1$ folgt, dass für alle $t, x \in \mathcal{D}$ die Determinante $\det(d\Phi_t(x))$ positiv ist (Verstehen Sie die Details dieses Arguments!).

Lassen wir nun t gegen 0 laufen und schauen uns die "infinitesimale" Änderung des Volumens an, so sehen wir

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \lambda(\Phi_t(E)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(\Phi_t(E)) - \lambda(E)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \int_E (\det(d\Phi_t(x)) - 1).$$

Nach einem schon vorher implizit verwendet und unten als Satz 29.2 formulierten Satz, können wir die Reihenfolge von Integration und Differentiation vertauschen und erhalten

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \lambda(\Phi_t(E)) = \int_E \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\det(d\Phi_t(x))) dx.$$

Nun ist Φ_0 die Identität, also auch die Ableitung von Φ_0 in jedem x . Die Ableitung der Kurve $t \rightarrow \Phi_t(x)$ zum Zeitpunkt 0 ist genau $V(x)$ nach Definition von Φ . Letztlich ist die Ableitung der Determinantenabbildung $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Einheitsmatrix I_n gleich der Spur:

$$(29.1) \quad d(\det)(I_n)(A) = \text{tr}(A),$$

wobei $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ die Spur von A bezeichnet (Was bedeuten alle Zeichen und Klammern in der obigen Formel?) Diese wichtige Formel kam eventuell in Analysis II vor, wird aber unten nochmal bewiesen.

Setzen wir die letzten drei Beobachtungen zusammen, sehen wir

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(d\Phi_t(x)) = \operatorname{tr}(Id \circ dV(x)) = \operatorname{tr}(dV(x)) = \operatorname{div}(V)(x) .$$

Insgesamt haben wir damit bewiesen, dass das Integral der Divergenz die Änderung des Volumens unter dem Fluß misst:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \lambda(\Phi_t(E)) = \int_E \operatorname{div}(V)(x) dx .$$

Insbesondere sehen wir:

Korollar 29.1. *Ein C^1 Vektorfeld V erfüllt genau dann $\operatorname{div}(V) = 0$, wenn der Fluß Φ von V das Volumen von allen messbaren Teilmengen erhält, wenn also für jedes messbare $E \subset O$ und jedes t , so dass $\Phi_t(E)$ definiert ist, die Gleichheit $\lambda(E) = \lambda(\Phi_t(E))$ gilt.*

Aufgabe: beweisen Sie das Korollar!

Vektorfelder V mit $\operatorname{div}(V) = 0$ werden in der Physik als *quellenfreie* Vektorfelder bezeichnet und kommen dort sehr häufig vor. Zum Beispiel beschreiben sie die Geschwindigkeitsfelder einer fließenden inkompressiblen Flüssigkeit.

Noch eine Bemerkung zum Schluss. Schauen wir uns nicht die absolute Änderung des Volumens an, sondern die relative, also die Rate der Änderung. Diese wird durch den Mittelwert der Divergenz bestimmt:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{\lambda(\Phi_t(E))}{\lambda(E)} = \frac{1}{\lambda(E)} \cdot \int_E \operatorname{div}(V) = \overline{f}_E \operatorname{div}(V) .$$

Benutzen wir schließlich, dass der Mittelwert jeder stetigen Funktion f über Teilmengen in der Nähe eines Punktes gegen den Wert von f in diesem Punkt konvergiert (Hausaufgabe):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \overline{f}_{E_r} = f(p) ;$$

hierbei ist E_r eine beliebige Teilmenge $E_r \subset B_r(p)$ mit positivem Lebesgue-Maß. Es ergibt sich eine punktweise geometrische Interpretation der Divergenz: Die Divergenz in einem Punkt misst die infinitesimale Rate der Volumenverzerrung in der Nähe dieses Punktes:

$$\operatorname{div}(V)(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{\lambda(\Phi_t(E_r))}{\lambda(E_r)} \right) ,$$

wobei E_r wieder eine beliebige Teilmenge von $B_r(p)$ mit positivem Lebesguemaß ist, zum Beispiel, $E_r = B_r(p)$.

29.2. Die Ableitung der Determinante. Hier beweisen wir (29.1).

Sei also $f = \det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ die Determinante. Die Abbildung ist nach dem Entwicklungssatz über die Determinante eine Summe von Produkten von Einträgen, insbesondere unendlich oft differenzierbar.

Wir behaupten, dass die Ableitung $L = df(I_n)$ an der Einheitsmatrix I_n durch die Spur

$$L(A) = \text{tr}(A)$$

gebildet wird. Man kann dies aus den Multilinearitäts-Eigenschaften der Determinante schließen, wir zeigen es aber in Koordinaten.

Dafür müssen wir nur die partiellen Ableitungen bestimmen, also nachrechnen, dass (warum ist genau das zu zeigen?)

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(I_n + t \cdot E_{ij}) = \delta_{ij}$$

gilt, wobei E_{ij} die Matrix ist, bei der 1 an der Stelle ij und 0 an allen anderen Stellen steht. Wie üblich ist δ_{ij} das Kronecker-delta. Nun ist aber die Determinante von $I_n + t \cdot E_{ij}$ konstant 1, wenn $i \neq j$ und gleich $1 + t$, wenn $i = j$ gilt. Daraus folgt die Behauptung.

29.3. Vertauschung von Differentiation und Integration. Aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz kann man sehr häufig die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung, insbesondere von Integration und Differentiation folgern. Folgende Aussage wurde in Spezialfällen schon einige Male benutzt.

SATZ 29.2. Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $F : U \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass für jedes $p \in U$ die Abbildung $F(p, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist. Definiere $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$f(p) = \int_X F(p, x) d\mu(x).$$

- Ist für jedes $x \in X$ die Funktion $F(\cdot, x) : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gibt es ein integrierbares $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $g(x) \geq |F(p, x)|$ für alle $p \in U$, so ist die Funktion f stetig.
- Ist für jedes $x \in X$ die Funktion $F(\cdot, x)$ stetig differenzierbar, und gilt für ein integrierbares $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $x \in X$ die Ungleichung $g(x) \geq \|dF(\cdot, x)\|_{\text{sup}}$, so ist f auch \mathcal{C}^1 und

$$df(p) = \int_X dF(p, x) d\mu(x)$$

also in Termen der Richtungsableitungen

$$(29.2) \quad \partial_u f(p) = \int_X \partial_u F(p, x) d\mu(x).$$

Aufgabe: machen Sie sich klar, was die Symbole "d" jeweils bedeuten, vor allem was $dF(p, x)$ bezeichnet.

Beweis. Die erste Aussage bedeutet, dass für $p_j \rightarrow p$ die Gleichheit $\lim_{j \rightarrow \infty} f(p_j) = f(p)$ gilt. Dies ist genau die Aussage des Satzes über die majorisierte Konvergenz.

Um die zweite Aussage zu beweisen, müssen wir nur (29.2) verifizieren (warum?). Um diese Gleichheit zu zeigen, sehen wir aber

$$\partial_u f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tu) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_X \frac{F(x, p + tu) - F(x, p)}{t} d\mu(x).$$

Nach dem Schrankensatz (Mittelwertsatz) hat der Wert unter dem Integral Betrag höchstens $|dF(x)(u)| \leq g(x) \cdot \|u\|$. Also kann man nach dem Satz über die Majorisierte Konvergenz den Grenzwertübergang mit der Integration vertauschen und wir erhalten (29.2). \square

Zum Abschluss eine Bemerkung zur Vorsicht. Der Satz über die majorisierte Konvergenz besagt (unter sehr milden Annahmen) die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung. Die obige Proposition besagt (wieder unter milden Annahmen) Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation.

Die Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung und Differentiation ist jedoch sehr selten gegeben; eine wichtige recht allgemeine Ausnahme wird in der Vorlesung Funktionentheorie besprochen.

Aufgabe: Finden Sie eine Folge von \mathcal{C}^1 Funktionen $f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die gleichmässig gegen 0 konvergieren, so dass die Ableitungen f'_i nicht gegen 0 konvergieren. Am besten überlegen Sie, wie die Graphen der Funktionen aussehen sollten und malen die entsprechenden Graphen.

29.4. Idee des Integralsatzes von Gauß. Betrachten wir wieder ein \mathcal{C}^1 Vektorfeld V auf einer offenen Menge O , seinen Fluß Φ und eine kompakte Teilmenge $E \subset O$. Wir nehmen an, dass $E = \bar{U}$ der Abschluss einer offenen Teilmenge U von O ist, dass der Rand ∂E Maß 0 hat. Für alle kleinen $t > 0$ ist $\Phi_t(E)$ definiert und wie wir oben gesehen haben, gilt

$$\int_E \operatorname{div}(V) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \lambda(\Phi_t(E)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\lambda(\Phi_t(E)) - \lambda(E)).$$

Nun gilt aber

$$\lambda(\Phi_t(E)) - \lambda(E) = \lambda(\Phi_t(E) \setminus E) - \lambda(E \setminus \Phi_t(E)).$$

Der erste Term rechts beschreibt das Maß der Menge der Punkte, die E in der Zeit t "verlassen" haben, der zweite die Menge der Punkte, die nach E in der Zeit t "eingewandert" sind.

Aufgabe: Malen Sie ein Bild und machen Sie sich die obige Beschreibung klar.

Für $t \rightarrow 0$ beschreibt die Differenz das "Maß" der Menge der Punkte, die die Grenze von E passieren, wobei wir berücksichtigen sollten, in welche Richtung die Grenze der Menge E überquert wird. Der Satz von Gauß, der Gegenstand der nächsten Kapitel bis zum Ende der Vorlesung, macht die obige Idee präzise, dass die infinitesimale Änderung des Volumens (die, wie wir wissen durch $\int \operatorname{div}(V)$ beschrieben wird) gleich der "Menge die Grenze von E passierenden Punkte" ist. Die letzte Größe, der so genannte Fluß des Vektorfeldes V durch die Grenze ∂E , wird für genügend reguläre ∂E durch ein Oberflächenintegral ausgedrückt.

30. TANGENTIALRÄUME, NORMALRÄUME, SATZ VON GAUSS

30.1. Tangentialräume und Normalräume. Der folgende Begriff ist von fundamentaler Bedeutung fürs Verständnis und Arbeiten mit Untermannigfaltigkeiten. Eventuell wurde er bereits in Analysis II bei der Besprechung des Satzes über implizite Funktionen diskutiert.

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ ein Punkt. Der *Tangentialraum* an die Untermannigfaltigkeit M im Punkte p ist die Menge $T_p M$ aller Vektoren $v \in \mathbb{R}^k$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine C^1 Kurve $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$, die ganz in M enthalten ist.

Der Tangentialraum ist also die Menge aller Geschwindigkeitsvektoren von Kurven in M , die in p starten. Wir stellen uns die Teilmenge $T_p M$ (wir werden gleich sehen, dass es ein Untervektorraum ist) als an den Punkt p angeheftet vor (wir malen also in Gedanken nicht $T_p M$ sondern die Teilmenge $p + T_p M$).

Aufgabe: malen Sie ein Bild und sehen Sie ein, dass dieser Begriff die Idee der Tangenten an einen Graphen in der Ebene verallgemeinert.

SATZ 30.1. *Sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k , sei $p \in M$. Dann ist $T_p M$ ein n -dimensionaler Untervektorraum.*

- (1) *Ist $\Phi : O \rightarrow \Phi(O)$ ein Diffeomorphismus auf einer Umgebung O von p in \mathbb{R}^k , so gilt $T_{\Phi(p)}(\Phi(M)) = d\Phi(p)(T_p M)$.*
- (2) *Ist $\Phi : O \rightarrow M$ eine Karte, für eine offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ und so dass $\Phi(q) = p$, so ist $T_p M$ das Bild von $d\Phi(q)$.*
- (3) *Ist $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ eine Submersion in einer Umgebung O von p und gilt $M \cap O = \Phi^{-1}(y)$, so ist $T_p M$ der Kern von $d\Phi(p) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$.*

Beweis. Hat M die Form $O \cap \mathbb{R}^n$ für eine offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^k$, so gilt für jedes $p \in M$ die Gleichheit $T_p M = \mathbb{R}^n$. Denn ist $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^k$ in \mathbb{R}^n enthalten, so gilt $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$. Andererseits, ist für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ und alle genügend kleine t die Kurve $\gamma(t) = p + t \cdot v \in O \cap \mathbb{R}^n$. Also $v = \gamma'(0) \in T_p M$.

Fangen wir nun mit (1) an. Der Diffeomorphismus Φ schickt \mathcal{C}^1 -Kurven in $M \cap O$, die in p starten, auf \mathcal{C}^1 -Kurven in $\Phi(M) \cap \Phi(O)$, die in $\Phi(p)$ starten und diese Zuordnung ist bijektiv (die Umkehrung wird durch Φ^{-1} gegeben). Für so eine Kurve γ gilt $(\Phi \circ \gamma)'(0) = d\Phi(p)(\gamma'(0))$. Daraus folgt die Behauptung $T_{\Phi(p)}(\Phi(M)) = d\Phi(p)(T_p M)$.

Ist M eine beliebige n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$, so finden wir eine offene Umgebung O von p und einen Diffeomorphismus $\Phi : O \rightarrow U$, so dass $\Phi(M \cap O) = \mathbb{R}^n \cap U$ gilt. Nach (1) ist $T_p M$ das Urbild von $T_{\Phi(p)}(\mathbb{R}^n \cap U) = \mathbb{R}^n$ unter dem linearen Isomorphismus $d\Phi(p)$. Also ist $T_p M$ ein n -dimensionaler Vektorraum.

Um (2) zu zeigen, sehen wir zunächst, dass $d\Phi(q)(\mathbb{R}^n) \subset T_p M$ gilt. Denn für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ ist $\eta(t) = q + tv$ eine \mathcal{C}^1 -Kurve in O und damit $\Phi \circ \eta$ eine \mathcal{C}^1 Kurve in M , die in p anfängt und Anfangsrichtung $(\Phi \circ \eta)'(0) = d\Phi(q)(v)$ hat. Da $T_p M$ und $d\Phi(q)(\mathbb{R}^n)$ beide n -dimensionale Vektorräume sind, muss also $d\Phi(q)(\mathbb{R}^n) = T_p M$ gelten.

Um (3) zu zeigen, betrachten wir eine beliebige \mathcal{C}^1 -Kurve γ , die in p startet. Dann ist $\Phi \circ \gamma(t) = y$ eine konstante Kurve, also gilt $d\Phi(p)(\gamma'(0)) = 0$. Also liegt $T_p M$ im Kern von $d\Phi(p)$. Abzählen der Dimensionen ergibt wieder $T_p M = \text{kern}(d\Phi(p))$. \square

Wir besprechen einige Beispiele.

1) Ist M ein linearer Unterraum V von \mathbb{R}^n , so gilt für alle $p \in M$ die Gleichheit $T_p M = V$.

2) Ist M der Graph einer \mathcal{C}^1 -Funktion $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $O \subset \mathbb{R}^n$, also $M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in O\}$, so ist der Tangentialraum in $p = (x, f(x))$ gegeben durch

$$T_p M = \{(v, \langle \nabla f(x), v \rangle) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

3) Ist $O \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ eine Submersion, so ist für $M = f^{-1}(y)$ und $p \in M$ der Tangentialraum $T_p M$ gegeben durch $T_p M = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, \nabla f(p) \rangle = 0\}$. Insbesondere, gilt für die Sphäre \mathbb{S}^n und jeden Punkt $p \in \mathbb{S}^n$ die Gleichheit

$$T_p \mathbb{S}^n = p^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p \rangle = 0\}.$$

Der *Normalraum* einer n -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^k$ im Punkt $p \in M$ ist nach Definition das orthogonale Komplement $T_p^\perp M$ des Tangentialraums $T_p M$ im umgebenden Raum \mathbb{R}^k . Das ist

ein Untervektorraum der Dimension $k - n$. (Die Zahl $k - n$ nennt man die *Kodimension* der Untermannigfaltigkeit.)

Nach Beispiel (3) oben ist für eine Untermannigfaltigkeit $f^{-1}(y)$ der Normalraum $T_p^\perp M$ eindimensional und wird von $\nabla f(p)$ aufgespannt. Insbesondere ist der Normalraum $T_p^\perp \mathbb{S}^n$ von p aufgespannt. (Beachte das "doppelte Wesen" von p in der letzten Formel: einmal tritt es als Punkt und einmal als Vektor auf!).

Ist eine Untermannigfaltigkeit M in der Nähe von p durch eine Karte Φ wie in Satz 30.1.(2) gegeben, so erhalten wir direkt eine Basis von $T_p M$ als Spalten der Jacobimatrix $d_q \Phi$ (warum?).

Ist eine Untermannigfaltigkeit M als Lösungsmenge von $k - n$ Gleichungen $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ wie in Satz 30.1.(3) gegeben, so sehen wir direkt eine Basis des Normalraums $T_p^\perp M$ als die $k - n$ Zeilen der Jacobimatrix $d_p \Phi$ (warum?).

30.2. Glatt berandete Gebiete. Eine offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein glatt berandeter Bereich, wenn für jeden Punkt $x \in \partial O$ eine Umgebung U von x und eine Submersion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und ein $t \in \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt

$$U \cap O = \{p \in U : f(p) < t\}.$$

In den Notationen oben gilt $U \cap (\partial O) = f^{-1}(t)$. Ferner gibt es (nach dem Satz über Submersionen) einen Diffeomorphismus $\Phi : V \rightarrow U'$ auf eine offene Menge U' in \mathbb{R}^n , so dass die Komposition $f \circ \Phi(x) = x_1$ für alle $x \in V$ gilt. Also ist

$$\Phi^{-1}(O) = \{x \in V : x_1 < t\}$$

eine offene Teilmenge in einem Halbraum und $\Phi^{-1}(\partial O)$ ist der Durchschnitt der offenen Menge V mit der affinen Hyperebene $x_1 = t$.

Aufgabe: Verifizieren Sie die obigen Aussagen.

"Das" glatt berandete Gebiet ist der offene Halbraum

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 < 0\}.$$

Jeder offene Ball ist ein glatt berandetes Gebiet, ebenso jedes Komplement eines abgeschlossenen Balls und der offene Rotationstorus

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 < 1\}.$$

Beispiele nicht glatt berandeter Gebiete sind offene Quader oder offene Simplexe. Das ist anschaulich klar, ein formaler Beweis sollte nach dem Lesen des Kapitels 30.4 erbracht werden. Auch eine geschlitzte Ebene oder die punktierte Ebene sind keine glatt berandeten Gebiete.

Aufgabe: Versuchen Sie die obigen Aussagen zu beweisen.

Sei nun $O \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes Gebiet mit Rand ∂O . Der Rand ∂O ist eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, also ist der Normalraum $T_x^\perp \partial O$ in jedem Punkt $x \in \partial O$ ein 1-dimensionaler Vektorraum. Ferner wird dieser Normalraum durch $\nabla_x f$ aufgespannt, wobei f wie in der Definition eines glatt berandeten Gebietes ist.

Der Normalraum $T_x^\perp \partial O$ hat genau zwei Vektoren mit Norm 1. Nur einer dieser beiden Vektoren ν_x zeigt "nach außen" im folgenden Sinn. Für jede \mathcal{C}^1 -Kurve $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, die in x in Richtung ν_x startet, gilt $\gamma(t) \notin O$ für alle kleinen $t > 0$. Denn

$$(f \circ \gamma)'(0) = \langle \nabla_x f, \nu_x \rangle .$$

Also ist $f \circ \gamma(t) > f(x)$ für alle kleinen t genau dann, wenn ν_x ein positives Vielfaches von $\nabla_x f$ ist.

Aufgabe: Malen Sie ein Bild und überzeugen Sie sich, dass wir die richtige Definition gewählt haben.

Nach der obigen Erklärung gilt also für alle $x \in \partial O$ die Gleichheit

$$\nu_x = \frac{\nabla_x f}{\|\nabla_x f\|} ,$$

wenn f eine Submersion in der Nähe von x wie in der Definition eines glatt berandeten Gebietes ist.

Dieser Vektor ν_x hängt stetig von $x \in \partial O$ ab (warum?) und heißt der *äußere Einheitsnormalenvektor* im Punkte x . Die Abbildung $x \rightarrow \nu_x$ heißt *äußeres Normalenvektorfeld* von O .

30.3. Heuristik und die Formulierung des Satzes von Gauß. Sei nun $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 Vektorfeld auf einer offenen Menge U und sei Φ der Fluß von V .

Sei O ein glatt berandeter Bereich, so dass \bar{O} kompakt und in U enthalten ist. Dann kann man durch Heuristiken beschreiben, wie viel "Volumen" in einer Zeit durch einen Teil $S \subset \partial O$ unter dem Fluß Φ aus der Menge O austritt. Um diese Heuristiken zu erhalten, denken wir uns das Stück S sehr klein und dann linear und das Vektorfeld V konstant in der Nähe von S . Dann tritt in der Zeit t durch S genau $t \cdot \langle V, \nu \rangle$ an Volumen aus der Menge O , wobei ν den äußeren Normalenvektor an einem (und damit jedem) Punkt in S bezeichnet.

Führt man diese Heuristik weiter, könnte erwartet werden, dass Volumen mit der Geschwindigkeit

$$\int_{\partial O} \langle V(x), \nu_x \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

die Menge O durch ihren Rand verlässt (siehe Seiten 88-89 in [Gri10].)

Der Satz von Gauß macht nun diese Heuristik exakt:

SATZ 30.2. Sei $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 Vektorfeld. Sei O ein glatt berandetes Gebiet, so dass \bar{O} kompakt und in U enthalten ist. Dann

$$\int_O \operatorname{div}(V)(x) d\lambda_n(x) = \int_{\partial O} \langle V(y), \nu_y \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

wobei ν_y das äußere Normalenfeld von O bezeichnet.

Der Beweis dieses Satzes und seine Anwendungen werden in der nächsten Vorlesung besprochen.

30.4. Erkennen von Nicht-Untermannigfaltigkeiten. Die Aussage, dass Tangentialräume Untervektorräume sind, erlaubt es, sehr häufig von einer "nicht glatt aussehenden Teilmenge" zu zeigen, dass sie keine Untermannigfaltigkeit ist.

Zum Beispiel sei N die runde Doppelpyramide:

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (1 - |z|)^2\}.$$

Machen Sie ein Bild und Äijberzeugen Sie sich, dass N die Vereinigung der beiden Kegel mit Basis B , die Einheitskreisscheibe in \mathbb{R}^2 und Spitzen in $p^\pm := (0, 0, \pm 1)$ ist. Sie M der topologische Rand $M = \partial N$ von N in \mathbb{R}^3 . Wie Sie vermutlich bei der Berechnung der Oberfläche von Kegeln gesehen haben, ist $M \setminus \{p^\pm, \mathbb{S}^1\}$ eine 2-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 . Sichtbar ist M sowohl an p als auch an \mathbb{S}^1 nicht "glatt".

Wir können nun beweisen, dass M in der Nähe von $\pm p^\pm$ und von keinem Punkt aus \mathbb{S}^1 eine Untermannigfaltigkeit ist. Dazu sehen wir, dass alle linearen Strecken, die $\pm p$ mit Punkten x aus \mathbb{S}^1 verbinden in M liegen. Also liegen Anfangs- bzw. Endrichtungen dieser Segmente in $T_{\pm p}M$ bzw. $T_x M$. Nun erzeugen (als Vektorraum) alle solchen Anfangsrichtungen den ganzen \mathbb{R}^3 . Damit müsste $T_p M = \mathbb{R}^3$ gelten, was für eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit nicht möglich ist.

Genauso erzeugen die beiden Endrichtungen der Strecken $[p, x]$ und $[-p, x]$ den von x und p erzeugten 2-dimensionalen Unterraum von $T_x M$. Da $T_x M$ außerdem die Tangentialrichtung an den Kreis $T_x \mathbb{S}^1 \subset T_x M$ enthält, sehen wir, dass auch $T_x M$ 3-dimensional sein müsste.

Mit ähnlichen Argumenten lässt sich zeigen, dass der Rand eines Quadrats oder eines Dreiecks keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit in der Nähe der Ecken ist (Aufgabe: beweisen Sie es!).

Wir bemerken noch, dass der Rand der Doppelpyramide M zu der Untermannigfaltigkeit \mathbb{S}^2 homöomorph und der Rand des Quadrats und des Dreiecks zur 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit \mathbb{S}^1 homöomorph sind (Aufgabe: Malen Sie den Homöomorphismus hin. Überlegen Sie, wo und wie dieser nicht "glatt" wird.).

Ähnlich kann man zeigen, dass die Vereinigung der beiden Achsen in \mathbb{R}^2 am Ursprung keine Untermannigfaltigkeit ist. Ferner ist ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$, bzw. eine abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 , bzw. keine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 . (Aufgabe: Zeigen Sie dafür, dass es eine Richtung $v \in T_p M$ gibt, so dass $-v$ nicht in $T_p M$ liegt!). Auch eine Kurve mit einer Spitze, wie z.B. der Graph von $f(t) = \sqrt{|t|}$ oder von $f(t) = |t|$ sind in der Nähe der Spitze keine Untermannigfaltigkeiten (Aufgabe: warum?).

30.5. Weitere Bemerkungen. Beachte, dass ein Diffeomorphismus $\Phi : O \rightarrow U$ Tangentialräume an Untermannigfaltigkeiten auf die Tangentialräume an die Bilduntermannigfaltigkeit abbildet, Satz 30.1(1). Normalräume müssen dabei aber nicht (!) auf Normalräume abgebildet werden (warum?).

Eine Translation $L(x) = x + b$ erhält Tangential- und Normalräume:

$$T_{L(p)}L(M) = T_p M \text{ und } T_{L(p)}^\perp L(M) = T_p^\perp M .$$

Eine lineare orthogonale Transformation $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ bildet für jede Untermannigfaltigkeit M die Tangential- und Normalräume auf Tangential- und Normalräume ab:

$$T_{L(p)}L(M) = L(T_p M) \text{ und } T_{L(p)}^\perp L(M) = L(T_p^\perp M) .$$

Aufgabe: machen Sie sich bildlich und formal klar, warum es gilt.

Dadurch kann man alle Fragestellungen, die Untermannigfaltigkeiten betreffen und die invariant unter Isometrien des Raumes sind (also zum Beispiel alle Fragen die Abstände, und Volumina, Integration betreffen), immer durch eine Translation und Drehung auf den Fall zurückführen, in dem ein gegebener Punkt $p \in M$ der Ursprung $p = 0$ von \mathbb{R}^k ist und der Tangentialraum gleich $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$ ist.

Man kann den Tangentialraum benutzen, um eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^k$ lokal als Graphen zu schreiben (möglicherweise ist dies bereits in irgendeiner Form beim Satz über implizite Funktionen in Analysis II vorgekommen):

Wie vorher, kann man nach einer Drehung annehmen, dass $T_p M = \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$ gilt. Betrachte die orthogonale Projektion $P : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir zeigen, dass es eine Umgebung O von p gibt, so dass $P : O \cap M \rightarrow P(O \cap M)$ eine Bijektion auf eine offene Menge $U = P(O \cap M)$ in \mathbb{R}^n ist. Ferner zeigen wir die Existenz einer \mathcal{C}^1 -Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ so dass $O \cap M$ genau der Graph

$$O \cap M = \{(x, F(x)) \in U \times \mathbb{R}^{k-n} \subset \mathbb{R}^k : x \in U\} .$$

Um dies einzusehen, betrachten wir eine beliebige Karte $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^k$, die eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n$ auf ein Kartengebiet in M um p abbildet. Sei $p = \Phi(q)$. Dann ist $d\Phi(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M = \mathbb{R}^k$ injektiv. Die lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ (also auch die Ableitung in p) schickt \mathbb{R}^k injektiv auf \mathbb{R}^n . Also ist für die Komposition $\Psi := P \circ \Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Ableitung in q injektiv. Nach dem Satz über inverse Abbildungen, ist Ψ ein Diffeomorphismus auf einer kleinen Umgebung W' von q . Das Bild $U = \Psi(W')$ ist offen in \mathbb{R}^n und dort ist die Umkehrung $\Psi^{-1} : U \rightarrow W$ ein Diffeomorphismus. Die \mathcal{C}^1 -Abbildung $G := \Phi \circ \Psi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ hat dann die Eigenschaft $P \circ G(x) = x$ für alle x . Ferner bildet G die Teilmenge U auf eine in M offene Teilmenge ab. Daraus folgt die Aussage (warum?).

31. SATZ VON GAUSS. ANWENDUNGEN

31.1. Eine Formel zu Volumenberechnung. Betrachte das Vektorfeld $V(x) = x$ auf \mathbb{R}^n . Dann gilt $\operatorname{div}(V)(x) = n$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wenden wir den Satz von Gauß auf ein beliebiges glatt berandetes Gebiet O an, so erhalten wir:

Korollar 31.1. *Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes Gebiet in \mathbb{R}^n kompaktem Abschluß \bar{O} und äußerem Einheitsnormalenfeld ν . Dann gilt*

$$\lambda(O) = \frac{1}{n} \cdot \int_{\partial O} \langle \nu(x), x \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Aufgabe: Verstehe die Details des Beweises. Leite eine ähnliche Formel für das Vektorfeld $V(x_1, \dots, x_n) = (x_1, 0, 0, \dots, 0)$ her.

Für die Einheitskugel $O = B_1(0)$ leiten wir so die uns bereits bekannte Formel her:

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \cdot \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Aufgabe: Wie folgt diese Formel aus dem Korollar?

31.2. Greensche Formeln. Für jede \mathcal{C}^1 Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und jedes \mathcal{C}^1 Vektorfeld V auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ rechnen wir nach (Aufgabe: tun Sie es!):

$$\operatorname{div}(f \cdot V) = f \cdot \operatorname{div}(V) + \langle \nabla f, V \rangle.$$

Setzen wir für $V = \nabla g$ für eine \mathcal{C}^2 Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, so sehen wir

$$\operatorname{div}(f \cdot \nabla g) = f \cdot \Delta(g) + \langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Damit können wir leicht die so genannten Formeln von Green beweisen, die in Analysis sehr häufig benutzt werden.

Proposition 31.2. Sei O ein glatt berandetes Gebiet mit kompaktem Abschluß \bar{O} . Seien f, g zwei \mathcal{C}^2 Funktionen auf einer Umgebung von \bar{O} . Bezeichne ν_x das äußere Normalenfeld auf ∂O . Dann gilt

$$\int_O f \cdot \Delta(g) = - \int_O \langle \nabla f, \nabla g \rangle + \int_{\partial O} f \cdot \langle \nabla g(x), \nu_x \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

$$\int_O (f \cdot \Delta(g) - g \cdot \Delta(f)) = \int_{\partial O} \langle f \cdot \nabla g(x) - g \cdot \nabla f(x), \nu_x \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Beweis. Die erste Formel ist genau der Satz von Gauß angewendet auf das Vektorfeld $f \cdot \nabla g$.

Die zweite Formel ergibt sich aus der ersten durch Vertauschen von f und g und Subtraktion (was heißt das?). \square

Die obigen Formeln werden besonders einfach, wenn f und g auf ∂O verschwinden.

31.3. Zugehörigkeit zu einem Gebiet. Das folgende auf den ersten Blick erstaunliche Resultat zeigt, dass ein punkt-abhängiges Integral manchmal diskrete Werte annimmt, die eine geometrische Interpretation erlauben. Erstaunlicherweise hängt das unten definierte Integral auch nicht von der Gestalt des Gebietes ab.

SATZ 31.3. Sei O ein glatt berandetes Gebiet in \mathbb{R}^n mit kompaktem Abschluß \bar{O} und äußerem Einheitsnormalenfeld ν_x . Das Integral

$$i(p) := \int_{\partial O} \left\langle \frac{x-p}{\|x-p\|^n}, \nu_x \right\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

nimmt den Wert 0 an, wenn $p \notin O$ und den Wert $\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ für $p \in O$.

Beweis. Indem wir alles ($O, \partial O$ und die Formel) um p verschieben, können wir $p = 0$ annehmen (was heißt das?).

Das Vektorfeld $V(x) = \frac{x}{\|x\|^n}$ ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ glatt und dort gilt (Aufgabe, siehe auch Kapitel 31.2):

$$\operatorname{div}(V)(x) = \frac{n}{\|x\|^n} - \left\langle x, \frac{n \cdot x}{\|x\|^{n+2}} \right\rangle = 0.$$

Ist $0 \notin O$ (und nach Voraussetzung nicht in ∂O), so können wir den Satz von Gauß anwenden und erhalten

$$0 = \int_{\partial O} \langle V(x), \nu_x \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Ist andererseits $0 \in O$, so wählen wir einen kleinen Ball $\bar{B}_r(0) \subset O$ und wenden den Satz von Gauß auf das glatt berandete Gebiet $O' :=$

$O \setminus \bar{B}_r(0)$ an. Wir erhalten

$$0 = \int_{\partial O'} \langle V(x), \nu_x \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{\partial O} \langle V(x), \nu_x \rangle + \int_{\partial B_r(0)} \langle V(x), \nu_x \rangle .$$

Hier benutzen wir, dass der Rand von O' genau die disjunkte Vereinigung des Randes von O und des Randes des ausgeschnittenen Balls ist. Beachte ferner, dass der äußere Einheitsnormalenvektor ν_x von O für $x \in \partial B_r(0)$ genau $-\frac{x}{\|x\|}$ ist. (Machen Sie sich klar, woher das Minuszeichen kommt!).

Das zweite Integral können wir damit direkt berechnen als

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{\|x\|^{n-1}} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r(0)) \cdot \frac{1}{r^{n-1}} = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) .$$

Das beendet den Beweis. \square

Aufgabe: Folgern Sie mit Hilfe von Satz 29.2, dass $\mathbb{R}^n \setminus \partial O$ nicht zusammenhängend ist.

31.4. Anwendung auf harmonische Funktionen. Wir können nun die Umkehrung von Proposition 26.2 beweisen:

SATZ 31.4. *Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^2 Funktion. Gilt $\Delta f = 0$ so ist f harmonisch.*

Beweis. Für $n = 1$ ist die Aussage klar (warum?). Sei also $n \geq 2$.

Nach Proposition 25.4 müssen wir für alle Bälle $\bar{B}_r(x) \subset O$ die Gleichheit

$$\int_{S_r(x)} f = f(x) ,$$

nachweisen. Wir wählen ein festes $x \in O$ und dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $x = 0$ und $f(0) = 0$ annehmen. Sei r_0 so dass $\bar{B}_{r_0}(0) \subset O$. Betrachte die Funktion $N : (0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\hat{N}(t) := \int_{S_t(0)} f(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) ,$$

Wir müssen $\hat{N}(t) = 0$ für alle $t \in (0, r_0]$ zeigen. Aus der Stetigkeit von f und $f(0) = 0$ folgt $\lim_{t \rightarrow 0} \hat{N}(t) = 0$. Es reicht also zu zeigen, dass $\hat{N}(t) = \hat{N}(s)$ für alle $s, t \in (0, r_0)$ gilt.

Betrachte die Funktion $g(x) = -\frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{\|x\|^{n-2}}$ für $n \geq 3$ und $g(x) = \log(\|x\|)$ für $n = 2$. Dies ist eine glatte Funktion $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ und es gilt im ganzen Definitionsbereich

$$\nabla g = \frac{x}{\|x\|^n} .$$

Wie wir im Beweis von Satz 31.3 nachgerechnet haben, gilt

$$\Delta(g) = \operatorname{div}(\nabla g) = 0 .$$

Wenden wir die Greensche Formeln auf $O = B_s(0) \setminus \bar{B}_t(0)$, so erhalten wir

$$0 = \int_{\partial O} \langle f \cdot \nabla g(x) - g \cdot \nabla f(x), \nu_x \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x) .$$

Der Rand ∂O ist die Vereinigung von $S_s(0)$ und $S_t(0)$ und wir erhalten (überlegen Sie wieder, wieso kein Minuszeichen entsteht)

$$\int_{S_s(0)} \langle f \cdot \nabla g(x) - g \cdot \nabla f(x), \nu_x \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{S_t(0)} \langle f \cdot \nabla g(x) - g \cdot \nabla f(x), \nu_x \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x) .$$

Hier bezeichnet ν_x das äußere Einheitsnormalenfeld an den entsprechenden Ball, also $\nu_x = \frac{x}{\|x\|}$.

Die Funktion g ist jeweils konstant auf $S_s(0)$ und auf $S_t(0)$. Man kann sie also im zweiten Summanden auf beiden Seiten vor das Integral ziehen. Wegen $\operatorname{div}(\nabla f) = 0$ und des Satzes von Gauß angewendet auf die Bälle $B_s(0)$ und $B_t(0)$ verschwinden aber diese beiden Integrale

$$\int_{S_s(0)} \langle \nabla f(x), \nu_x \rangle = \int_{S_t(0)} \langle \nabla f(x), \nu_x \rangle = 0 .$$

Ferner gilt für alle $x \in S_s(0)$ die Gleichheit

$$\langle \nabla g(x), \nu_x \rangle = s^{1-n} ,$$

und analog für $x \in S_t(0)$. Also ergibt sich aus der Gleichheit der obigen Integrale

$$s^{1-n} \int_{S_s(0)} f = t^{1-n} \int_{S_t(0)} f .$$

Dies bedeutet aber genau $N(t) = N(s)$ und beendet den Beweis. \square

32. BEWEIS DES SATZES VON GAUSS

32.1. Lokalisierung. Wir machen die Beobachtung, dass die Ausdrücke auf beiden Seiten in der Gleichung im Integralsatz von Gauß linear in V sind.

Wenn wir also V als eine endliche Summe von Vektorfeldern V^j schreiben, so reicht es die Aussage für V^j zu beweisen.

Nun wählen wir für jeden Punkt $x \in \bar{O}$ eine offene Menge Q^x in \mathbb{R}^n , die x enthält und Folgendes erfüllt:

1) Ist $x \in O$ so ist Q^x ein offener ganz in O enthaltener Quader.

2) Ist x in ∂O enthalten, so ist nach Anwendung einer Isometrie T , die Untermannigfaltigkeit $T(\partial O \cap Q^x)$ ein Graph über der Hyperebene \mathbb{R}^{n-1} und $T(O \cap Q^x)$ die Menge unter dem Graphen. Ferner ist $T(Q^x)$

ein Quader, hat also die Form $T(Q^x) = Q' \times (0, a)$ für $a > 0$ und einen offenen Quader $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Wir finden also eine \mathcal{C}^1 Funktion $F : Q' \rightarrow (0, \infty)$ und es gilt

$$T(O \cap Q^x) = \{(p, t) \in Q' \times \mathbb{R} : p \in Q', 0 < F(p) < t\}.$$

Die Existenz von Q^x wie in (1) folgt aus der Offenheit von O . Die Existenz der speziellen Umgebung Q^x wie in (2) und der Drehung T folgt aus dem Satz über Submersionen, siehe auch Kapitel 30.5.

Nun wählen wir eine endliche Teilüberdeckung von \bar{O} durch endlich viele solche Quader und eine untergeordnete Zerlegung der Eins $1 = f_1 + \dots + f_k$ wie in Satz 18.1 beschrieben. Also ist jedes f_i eine glatte nicht-negative Funktion mit Träger in einer der Teilmengen Q^x .

Dann gilt $V = f_1 \cdot V + f_2 \cdot V + \dots + f_k \cdot V$. Nach der ersten Bemerkung in diesem Kapitel reicht es, die Aussage für die Summanden $V^j = f_j \cdot V$ zu beweisen. Also dürfen wir annehmen, dass unser Vektorfeld V überall gleich 0 ist bis auf eine kompakte Teilmenge K , die in einem der offenen Quader Q^x enthalten ist.

Wir fixieren nun eines dieser $Q^x = Q$ und V mit Träger $K \subset Q$. Wir merken an, dass beide Integrale in der Formulierung des Satzes von Gauß invariant unter jeder Isometrie T sind. Im Fall dass unser Punkt x ein Randpunkt von O ist, drehen wir das Bild und nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass Q^x ein Quader ist und O die Menge unter einem Graphen in diesem Quader ist.

Ferner können wir V schreiben als $V = W^1 + \dots + W^n$, wobei das Vektorfeld W^i als i -te Koordinate genau V_i hat und alle übrigen Koordinaten verschwinden. Wiederum reicht es die Aussage für jedes dieser W^i zu beweisen. In anderen Worten dürfen wir annehmen, dass alle Koordinaten von V bis auf die i -te Koordinate verschwinden und diese durch eine Funktion $g = V_i$ mit Träger in $K \subset Q$ gegeben ist. Wir müssen also nur noch beweisen (überzeugen Sie sich, dass der Satz von Gauß in diesem Fall diese Form hat):

$$(32.1) \quad \int_{Q \cap O} \partial_i g = \int_{Q \cap \partial O} g \cdot \nu_x^i d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

wobei ν_x^i die i -te Koordinate des Normalenvektors ν_x bezeichnet.

32.2. Der Fall der inneren Punkte. Ist $Q = Q^x$ für einen inneren Punkt $x \in O$, gilt also $Q^x \subset O$, so steht auf der rechten Seite von (32.1) die Zahl 0, weil dort über die leere Menge integriert wird.

Schreiben wir andererseits $Q = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$, so gilt für $i = n$ (und für aller anderen i analog) nach Fubini und dem Hauptsatz

der Differential- und Integralrechnung in einer Variablen:

$$\begin{aligned} \int_{Q \cap O} \partial_i g &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} \partial_n g \, dx_n \, dx_{n-1} \dots dx_1 = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} (g(x_1, \dots, x_{n-1}, b_n) - g(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n)) \, dx_{n-1} \dots dx_1 = 0, \end{aligned}$$

weil nach Annahme über den Träger, g am Rand des Quaders Q verschwindet (verstehen Sie das Argument!).

32.3. Randpunkte. Sei nun $Q = Q^x$ für einen Randpunkt $x \in \partial O$. Wie oben erklärt können wir annehmen, dass Q die Form $Q' \times (0, a)$ hat. Ferner gibt es eine \mathcal{C}^1 Funktion $F : Q' \rightarrow (0, a)$, so dass $\partial O \cap Q$ der Graph von F ist und $O \cap Q$ die Menge unter dem Graphen.

Bemerkung 32.1. Es ist eine sehr gute und leichte Aufgabe den Rest des Beweises in dem Fall durchzuführen, dass F eine konstante Funktion, $O \cap Q$ also selbst ein Quader ist. In diesem Fall folgt die Aussage genau wie im Fall der inneren Punkte direkt aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung, ohne Rechnungen und Umformungen.

Die linke Seite der zu beweisenden Behauptung (32.1)

$$\int_{Q \cap O} \partial_i g = \int_{Q \cap \partial O} g \cdot \nu_x^i \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

ist wegen des Satzes von Fubini gleich

$$\int_{Q \cap O} \partial_i g = \int_{Q'} \int_0^{F(x)} \partial_i g(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \, d\lambda(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Ein Normalenvektor im Punkt $y = (x, F(x))$ an ∂O ist gegeben durch

$$\hat{\nu}_y = (-\partial_1 F(x), \dots, -\partial_{n-1} F(x), 1)$$

(warum?). Der äußere Einheitsnormalenvektor ist dann (warum?)

$$\nu_y = \nu_{(x, F(x))} = \frac{1}{\sqrt{\|\nabla F(x)\|^2 + 1}} \cdot (-\partial_1 F(x), \dots, -\partial_{n-1} F(x), 1).$$

Wegen der Flächenformel ist also die rechte Seite von (32.1) gleich:

$$\int_{Q \cap \partial O} g(y) \cdot \nu_y^i \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_{Q'} g(x, F(x)) \cdot \hat{\nu}_{(x, F(x))}^i \, d\lambda_{n-1}(x)$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle, den Fall $i = n$ und den Fall $i < n$. Im Fall $i = n$ gilt $\hat{\nu}_y = 1$ und die Gleichheit

$$\int_{Q'} \int_0^{F(x)} \partial_n g(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \, d\lambda(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{Q'} g(x, F(x)) \, d\lambda_{n-1}(x)$$

ist wieder der Satz über Differential- und Integralrechnung in der Variablen x_n ; beachte $g(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0!$

Alle Fälle $i < n$ sind zueinander analog. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $i = 1$ annehmen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $n = 2$ ist, der allgemeine Fall funktioniert genauso (man schleppt die anderen Koordinaten bei allen Integralen mit). In diesem Fall ist Q' ein offenes Intervall $Q' = (b, c)$. Zu zeigen bleibt:

$$\int_b^c \int_0^{F(x_1)} \partial_1 g(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \int_b^c g(x_1, F(x_1)) \cdot (-F'(x_1)) dx_1 .$$

Nun gilt aber (Hausaufgabe):

$$\frac{d}{dx_1} \int_0^{F(x_1)} g(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^{F(x_1)} \partial_1 g(x_1, x_2) dx_2 + g(x_1, F(x_1)) \cdot (F'(x_1)) .$$

Also ist die zu beweisende Gleichung genau

$$0 = \int_b^c \left(\frac{d}{dx_1} \int_0^{F(x_1)} g(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 .$$

Wieder folgern wir aus Analysis 1, dass die rechte Seite gleich

$$\int_0^{F(c)} g(c, x_2) dx_2 - \int_0^{F(b)} g(b, x_2) dx_2 = 0 - 0 = 0 ,$$

weil g am Rande des Quaders $(b, c) \times (0, a)$ verschwindet.

Das beendet den Beweis.

REFERENCES

- [Gri10] D. Grieser. Analysis III. 2010.
- [Kön93] K. Königsberger. *Analysis. 2*. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, 1993. Grundwissen Mathematik.
- [Swe17] G. Sweers. Notizen zur Vorlesung Analysis III. 2017.