Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 1
14.10.2021

Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von einem Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

Abgabe: Bis 21.10. 10 Uhr via Ilias

Ein *) kennzeichnet Zusatzaufgaben. Ihre Bearbeitung ist freiwillig und ermöglicht Bonuspunkte.

1. (20 Punkte) Sei $l \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die parametrisierte Kurve $\gamma_l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $\gamma_l(t) = (t + l \cdot \sin t, l \cdot \cos t)$. Beschreiben Sie die Menge der Zahlen l, sodass γ_l

   a) glatt ist.

   b) regulär ist.

   c) keine Selbstschnitte besitzt.

   *) Zeigen Sie, dass wenn γ_l keine Selbstschnitte besitzt, das Bild von γ_l eine einfache Kurve ist.

2. (0 Punkte) Betrachten Sie die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3\}$.

   a) Wird durch M eine einfache Kurve beschrieben? Malen Sie ein Bild der Kurve.

   b) Gibt es eine glatte (und reguläre) Parametrisierung für die Kurve?

3. (0 Punkte)

   a) Seien X und Y metrische Räume. Zeigen Sie, dass jede Lipschitz stetige Funktion $f : X \to Y$ stetig ist.

   b) Finden Sie eine Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die stetig, aber nicht Lipschitz stetig ist.

   c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ glatt und $K \subset U$ konvex und kompakt. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf K Lipschitz stetig ist.

4. (0 Punkte) Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

   $X \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(X) \subset \{0, 1\}$ ist konstant.