Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 10
22.12.2021

Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von einem Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

Abgabe: Bis 13.01. 10 Uhr via Ilias

1. (20 Punkte) Sei

$$\Sigma := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \cosh(z)^2 = x^2 + y^2\right\},$$

wobei $\cosh(z) := \left(e^z + e^{-z}\right)/2$.

   a) Fertigen Sie eine grobe Skizze der Menge Σ an.
   b) Zeigen Sie, dass Σ eine glatte Fläche ist.
   c) Bestimmen Sie zu jedem Punkt $p \in \Sigma$ den Tangentialraum $T_p\Sigma$.
   d) Zeigen Sie, dass Σ orientierbar ist indem Sie ein stetiges Normalenvektorfeld angeben.

2. (0 Punkte) Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$$

und $\Sigma := f(\mathbb{R}^2)$.

   a) Fertigen Sie eine grobe Skizze der Menge Σ an.
   b) Zeigen Sie, dass Σ eine glatte Fläche ist.
   c) Bestimmen Sie zu jedem Punkt $p \in \Sigma$ den Tangentialraum $T_p\Sigma$.
   d) Zeigen Sie, dass Σ orientierbar ist indem Sie ein stetiges Normalenvektorfeld angeben.

3. (0 Punkte) Sei $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ der Kreis mit Radius 1 um den Punkt $(0,2)$ und $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ die zugehörige Rotationsfläche ('surface of revolution').

   a) Fertigen Sie eine grobe Skizze der Menge Σ an.
   b) Zeigen Sie, dass Σ eine glatte Fläche ist.

c) Bestimmen Sie zu jedem Punkt $p \in \Sigma$ den Tangentialraum $T_p\Sigma$.

d) Zeigen Sie, dass Σ orientierbar ist indem Sie ein stetiges Normalenvektorfeld angeben.

4. (0 Punkte) Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die (x, y)-Ebene, $f \colon \mathbb{R}^3 \to E$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = (y^2, y^3, 0),$$

sowie g die Einschränkung von f auf S^2. Bestimmen Sie für welche $p \in S^2$ das Differential $\mathrm{d}_p g \colon T_p S^2 \to T_{g(p)} E$ die Nullabbildung ist.