Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 12
20.01.2022

Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von einem Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

Abgabe: Bis 27.01. 10 Uhr via Ilias

1. (0 Punkte) Sei Σ eine glatte Fläche, sowie γ eine Kurve in Σ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Wir nehmen an, dass v ein Einheitsvektor ist, aber γ nicht unbedingt nach Bogenlänge parametrisiert ist. Zeigen Sie, dass $|k_v| = \kappa^\gamma(0)$ genau dann gilt, wenn $\gamma''(0)$ in der Ebene liegt, die von v und der Normalenrichtung zu Σ in p aufgespannt ist.

2. (0 Punkte) Seien Σ_1 und Σ_2 glatte orientierbare Flächen, die sich mit konstantem Winkel zueinander entlang einer regulären Kurve γ schneiden. Zeigen Sie: Ist γ eine Krümmungslinie von Σ_1, so ist γ auch eine Krümmungslinie von Σ_2. Folgern Sie, dass Meridiane von Rotationsflächen Krümmungslinien sind.

   (Tipp: Leiten Sie das Skalarprodukt der Normalenfelder von Σ_1 und Σ_2 entlang der Kurve γ ab.)

3. (20 Punkte) Sein l eine Gerade und Σ eine kompakte Fläche, sodass der Abstand von jedem Punkt $p \in \Sigma$ zu l kleiner ist als 1. Zeigen Sie, dass es einen Punkt auf Σ gibt in dem die Gaußkrümmung größer ist als 1.

4. (0 Punkte) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ glatt und Σ der Graph von f. Sei $p = (x, y, f(x, y)) \in \Sigma$, sowie $v_1 := (1, 0, \partial_1 f(x, y))$ und $v_2 := (0, 1, \partial_2 f(x, y))$.

   a) Zeigen Sie, dass die Darstellungsmatrix der zweiten Fundamentalform von Σ in p bzgl. der Basis (v_1, v_2) (d.h. die 2×2-Matrix gegeben durch $a_{ij} = \langle \mathrm{Shape}_p(v_i), v_j \rangle$) ein skalares Vielfaches der Hessematrix von f im Punkte (x, y) ist.

   b) Zeigen Sie, dass die Gaußkrümmung von Σ im Punkt p dasselbe Vorzeichen hat wie die Determinante der Hessematrix von f im Punkte (x, y).

      (Tipp: Erinnern Sie sich oder lesen Sie nach, wie sich die Darstellungsmatrizen von Bilinearformen bzgl. Basiswechseln transformieren.)