Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 13
27.01.2022

Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von einem Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

Abgabe: Bis 03.02. 10 Uhr via Ilias

Die Bearbeitung dieses Blattes ist freiwillig und ermöglicht es, zusätzliche Punkte zu sammeln.

1. (10 Zusatzpunkte) Seien Σ_1, Σ_2 zwei orientierte Flächen mit gemeinsamem Punkt p, sodass gilt $T_p\Sigma_1 = T_p\Sigma_2$ und die Einheitsnormalenvektoren von beiden Flächen im Punkt p übereinstimmen. Zeigen Sie:

   a) Gilt für die Hauptkrümmungen $k_2(p)_{\Sigma_1} \geq k_1(p)_{\Sigma_1} > k_2(p)_{\Sigma_2} \geq k_1(p)_{\Sigma_2}$, so stützt die Fläche Σ_2 die Fläche Σ_1 von Außen.

   b) Falls lediglich $k_2(p)_{\Sigma_1} > k_2(p)_{\Sigma_2}$ und $k_1(p)_{\Sigma_1} > k_1(p)_{\Sigma_2}$ vorausgesetzt ist, muss die Aussage nicht gelten.

2. (10 Zusatzpunkte) Sei γ eine Geodäte und eine asymptotische Kurve (das heißt die Normalkrümmung von γ ist überall gleich Null) in einer glatten Fläche Σ. Zeigen Sie, dass γ ein Geradensegment ist.

3. (10 Zusatzpunkte) Sei Σ eine glatte Fläche und γ_1, γ_2 Kurven auf Σ.

   a) Zeigen Sie, dass wenn γ_1 und γ_2 kürzeste Kurven mit gemeinsamen Punkten p, q sind, die Punkte p, q entweder Endpunkte von beiden Kurven sind oder γ_1 und γ_2 übereinstimmen.

   b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass sich Geodäten beliebig oft schneiden können, ohne dabei auf einer Teilkurve übereinzustimmen.