Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 2
21.10.2021

Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von einem Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

Abgabe: Bis 28.10. 10 Uhr via Ilias

1. (0 Punkte) Für $l \in \mathbb{R}$ sei
$$S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$
und
$$Z_l = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; (x - l)^2 + y^2 = 1\right\}.$$
Bestimmen Sie, für welche Parameter $l \in \mathbb{R}$ die Menge $C_l = S^2 \cap Z_l$ eine reguläre Kurve ist.

2. (20 Punkte) Sei $\gamma \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch
$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(t,\ t \cdot \cos\left(\frac{\pi}{t}\right)\right) & , \text{ für } t \neq 0 \\ (0, 0) & , \text{ für } t = 0 \end{cases}.$$
   a) Fertigen Sie eine grobe Skizze der Kurve an.
   b) Zeigen Sie, dass γ stetig ist.
   c) Zeigen Sie, dass die Einschränkungen von γ auf $[-1, 0)$ und $(0, 1]$ jeweils reguläre Kurven sind.
   d) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\left|\gamma\left(\frac{1}{n}\right) - \gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| \geq \frac{1}{n}.$$
   e) Zeigen Sie, dass γ unendliche Länge hat.

3. (0 Punkte) Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $\gamma_{a,b} \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
$$\gamma_{a,b}(t) = (a \cdot \cos(t),\ a \cdot \sin(t),\ b \cdot t).$$
   a) Berechnen Sie die Funktion $s \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ gegeben durch $s(t) = \ell\left(\gamma|_{[0,t]}\right)$.

b) Überprüfen Sie, dass $\widehat{\gamma}_{a,b} = \gamma_{a,b} \circ s^{-1}$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

4. (0 Punkte) Sei $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \big(e^{-t} \cdot \cos(t),\ e^{-t} \cdot \sin(t)\big)$$

a) Fertigen Sie eine grobe Skizze der Kurve an.

b) Zeigen Sie, dass γ endliche Länge hat.

c) Zeigen Sie, dass sich bei jeder Umdrehung der Abstand zum Ursprung um den gleichen Faktor ändert. Das heißt, dass

$$\frac{|\gamma(t+2\pi)|}{|\gamma(t)|}$$

nicht von t abhängt.

d) Zeigen Sie, dass γ jede Gerade durch den Ursprung unendlich oft schneidet.