Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 3
28.10.2021

Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von einem Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

Abgabe: Bis 21.10. 10 Uhr via Ilias

1. (20 Punkte) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und es bezeichne $\mathbb{S}^2$ die Einheitssphäre im Raum. Weiter sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{S}^2$ eine geschlossene, sphärische Kurve der Länge $r < 2\pi$. Zeigen Sie, dass das Bild von γ in einem abgeschlossenen Ball $\overline{B}[z, \frac{r}{4}]_{\mathbb{S}^2}$ mit Radius $\frac{r}{4}$ und Mittelpunkt $z \in \mathbb{S}^2$ liegt. (Wichtig: Der Ball $\overline{B}[z, \frac{r}{4}]_{\mathbb{S}^2}$ wird bezüglich der Längenmetrik von $\mathbb{S}^2$ betrachtet.)

2. (0 Punkte) Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine abgeschlossene Teilmenge. Zeigen Sie, dass A konvex ist genau dann, wenn

$$|x-y|_A = |x-y|_{\mathbb{R}^3},$$

für alle $x, y \in A$.

3. (0 Punkte)

   a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine geschlossene Kurve. Zeigen Sie, dass der Durchmesser d des Bildes von γ die Ungleichung $2d \leq \text{length}(\gamma)$ erfüllt.

   b) Zeigen Sie, dass wenn γ einfach geschlossen ist, die Ungleichung $2d \leq \text{length}(\gamma)$ strikt ist.

   c) Beweisen Sie, dass die Aussagen in a) und b) auch für sphärische Kurven der Länge $< 2\pi$ gelten. (Der Durchmesser wird hierbei in der Längenmetrik von $\mathbb{S}^2$ gemessen.) Finden Sie ein Gegenbeispiel welches zeigt, dass Aussage b) nicht für alle Kurven der Länge 2π gilt.

4. (0 Punkte) Sei $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Verifizieren Sie durch Integration, dass der Mittelwert $|\overline{w_u}|$ der Funktion $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, $f(u) = |\langle w, u \rangle|$ genau $\frac{2}{\pi}$ ist. (Benutzen Sie für den Mittelwert einer stetigen Funktion der Form $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, die Formel $\bar{f} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})dt$.)