Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 4
04.11.2021

Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von einem Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

Abgabe: Bis 11.11. 10 Uhr via Ilias

1. (0 Punkte) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (t, f(t))$.

   a) Zeigen Sie, dass
   $$\kappa_\gamma(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + |f'(x)|^2)^{3/2}}.$$

   b) Zeigen Sie: Ist $f''(t) \neq 0$ auf $[-1,1]$, so ist die Totalkrümmung $\Phi(\gamma)$ der Winkel zwischen $\gamma'(-1)$ and $\gamma'(1)$.

   c) Berechnen Sie die Totalkrümmung $\Phi(\gamma)$ für $f(t) = t^2$ einmal mittels Teilaufgabe a) und einmal mittels Teilaufgabe b).

2. (20 Punkte) Sei $f\colon [-3,4] \to \mathbb{R}$ gegeben durch
   $$f(t) = \begin{cases} 1 + \sqrt{1 - (2+t)^2} & , t \in [-3,-1] \\ |t| & , t \in [-1,1] \\ 2t - 1 & , t \in [1,2] \\ 3 - \sqrt{1 - (3-t)^2} & , t \in [2,4] \end{cases}.$$

   a) Fertigen Sie eine grobe Skizze des Funktionsgraphen von f an.

   b) Zeigen Sie, dass der Funktionsgraph von f eine stückweise glatte Parametrisierung γ besitzt.

   c) Berechnen Sie die Totalkrümmung $\Phi(\gamma)$.

3. (0 Punkte) Die Klothoide $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch
   $$c(t) = \left(\int_0^t \cos(u^2/2)\ \mathrm{d}u, \int_0^t \sin(u^2/2)\ \mathrm{d}u \right).$$

   a) Schauen Sie sich den Plot der Klothoide auf Wikipedia an.

b) Zeigen Sie, dass die Klothoide nach Bogenlänge parametrisiert ist.

c) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa_c(t)$.

4. (0 Punkte) Sei $\gamma = A_1A_2A_3A_4$ ein Viereck, d.h. ein geschlossener Polygonzug bestehend aus 4 Strecken.

   a) Zeigen Sie, dass $\Phi(\gamma) \in [2\pi, 4\pi]$.

   b) Zeigen Sie, dass $\Phi(\gamma)$ jeden Wert $\phi \in [2\pi, 4\pi]$ annehmen kann.