Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 5
12.11.2021

Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von <u>einem</u> Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

Abgabe: Bis 18.11. 10 Uhr via Ilias

1. (0 Punkte)

   a) Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve. Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ seien die Vektoren $\gamma'(t)$ und $\gamma''(t)$ linear unabhängig und die Vektoren $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)$ linear abhängig. Zeigen Sie, dass die Kurve γ in einer Ebene enthalten ist.

   b) Finden Sie eine reguläre Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, für die γ' und γ'' nur zu dem Zeitpunkt 0 linear abhängig sind, so dass die Kurve aber nicht in einer Ebene liegt. (Tipp: Die beiden Teilkurven $\gamma((-\infty, 0])$ und $\gamma([0, \infty))$ sind jeweils in einer Ebene enthalten. Überlegen Sie, was bei $\gamma(0)$ passieren muss.)

2. (20 Punkte)

   a) Parametrisieren Sie einen Kreis mit Radius r um einen Punkt in einer Ebene E im Raum $\mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge. Bestimmen Sie die Krümmung des Kreises. (Wählen Sie eine Orthonormalbasis von E und nennen Sie das Zentrum des Kreises p.)

   b) Zeigen Sie, dass zwei Kurven γ und η in $\mathbb{R}^3$, die beide Kreise oder Geraden sind, genau dann Kontakt der Ordnung 2 in einem Punkt haben, wenn Sie übereinstimmen.

   c) Zeigen Sie, dass es für jede reguläre Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ und jedes $t_0 \in I$ genau einen Kreis oder eine Gerade η gibt, sodass γ und η im Punkt $\gamma(t_0)$ Kontakt der Ordnung 2 haben.

3. (0 Punkte) Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine glatte, reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Für die Krümmung κ von γ gelte $\kappa(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Kurve γ besitzt *konstante Steigung* genau dann, wenn der Winkel zwischen $\gamma'(t)$ und einem Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ konstant ist für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Die *Evolvente* von γ ist definiert als die Kurve

$$\begin{aligned} &\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \\ &\eta(t) = \gamma(t) + (t_0 - t)\gamma'(t). \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass die Evolvente von γ in einer Ebene liegt, wenn γ konstante Steigung besitzt.