Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 6
18.11.2021

Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von einem Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

Abgabe: Bis 25.11. 10 Uhr via Ilias

1. (0 Punkte) Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine glatte reguläre Kurve mit orientierter Krümmung $k(t) \neq 0$ und Frenet Rahmen $(\mathrm{T}(t), \mathrm{N}(t))$. Die *Evolute* von γ ist die Kurve $\omega_\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch
$$\omega_\gamma(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot \mathrm{N}(t).$$
Berechnen Sie die Evolute der Kurve $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (2\cos(t), \sin(t))$.

2. (20 Punkte) Finden Sie einen geschlossenen Polygonzug γ in $\mathbb{R}^2$, sodass $\Psi(\gamma) = 2\pi$ und $\Phi(\gamma) = 4\pi$. Beweisen Sie, dass γ die genannten Eigenschaften hat.

3. (0 Punkte) Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine glatte reguläre Kurve mit orientierter Krümmung $k(t)$ und Frenet Rahmen $(\mathrm{T}(t), \mathrm{N}(t))$. Für $l \in \mathbb{R}$ sei γ_l die Kurve
$$\gamma_l(t) = \gamma(t) + l \cdot \mathrm{N}(t).$$
   a) Zeigen Sie: Wenn $l \cdot k(t) \neq 1$ für alle $t \in [a,b]$, so ist γ_l regulär.
   b) Zeigen Sie, dass
   $$\operatorname{length}(\gamma_l) = \operatorname{length}(\gamma) - l \cdot \Psi(\gamma)$$
   für alle genügend kleinen $l \in \mathbb{R}$.
   c) Zeigen Sie, dass die Gleichung in b) im Allgemeinen nicht für alle $l \in \mathbb{R}$ gelten muss.

4. (0 Punkte) Bestimmen Sie $\Phi(\gamma)$ und $\Psi(\gamma)$ für die unten abgebildete planare Kurve γ.