Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 7
12.11.2021

Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von einem Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

Abgabe: Bis 02.12. 10 Uhr via Ilias

1. (0 Punkte) Bestimmen Sie für die Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ gegeben durch $f_1(t) = t^3$, $f_2(t) = t^4$, $f_3(t) = \sin(t)$ mit den Graphen $\Gamma_i = \{(t, f(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ alle Scheitelpunkte, das heißt die Nullstellen von k_i', wobei $k_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Krümmung der durch Γ_i gegebenen Kurve beschreibt.

2. (0 Punkte) Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine glatte, reguläre, einfache Kurve. Zeigen Sie, dass wenn der Krümmungskreis von γ in $p = \gamma(t)$ eine Stützkurve von γ ist, der Punkt p ein Scheitelpunkt von γ ist.

3. (20 Punkte) Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine glatte, reguläre, einfach geschlossene, konvexe Kurve, sodass der Durchmesser $\operatorname{diam}(\gamma(I))$ des Bildes von γ echt größer als 2 ist. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $t_0 \in I$ gibt, in dem $\kappa(t_0) = |k(t_0)| < 1$ gilt, wobei $k(t_0)$ die Krümmung von γ in t_0 beschreibt. (Tipp: Die Kurve γ schließt eine konvexe Menge F ein. Wählen Sie zwei Punkte $x, y \in F$ mit Abstand echt größer 2. Betrachten Sie dann Kreisscheiben mit gleichem Radius, sodass x, y beide auf dem Rand der Kreisscheiben liegen. Finden Sie unter solchen Kreisscheiben zwei Kreisscheiben B_1, B_2 mit minimalem Radius, sodass der Schnitt $B_1 \cap B_2$ in F enthalten ist. Für B_1 und B_2 gibt es zwei Fälle: 1. $B_1 = B_2$ und das Zentrum der Kreisscheiben liegt genau in der Mitte zwischen x und y. In diesem Fall suchen Sie eine beliebige Kreisscheibe mit maximalem Radius, die in F enthalten ist. 2. $B_1 \neq B_2$. Finden Sie in diesem Fall einen Punkt in $B_1 \cap B_2 \cap \gamma$.)

4. (0 Punkte) Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge. Unter allen abgeschlossenen Kreisscheiben, die K enthalten, gibt es eine Kreisschreibe B mit minimalem Radius. Zeigen Sie: Der Randkreis ∂B so einer minimalen Kreisscheibe enthält mindestens zwei Punkte aus K. Wenn es genau nur zwei Punkte sind, was gilt dann zusätzlich?
Dasselbe gilt für Kreisscheiben mit maximalem Radius, die in K enthalten sind (wenn solche existieren). Was hat diese Aufgabe mit der letzten und der nächsten Vorlesung zu tun?