Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 8
02.12.2021

Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von einem Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

Abgabe: Bis 09.12. 10 Uhr via Ilias

1. (0 Punkte) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve mit $\Phi(\gamma) < \pi$. Dann kann man (bis auf Umparametrisierung der Kurve und Bewegung des Raumes) γ als Graph schreiben, d.h. $\gamma(t) = (t, y(t), z(t))$ mit glatten Funktionen $y(t)$ und $z(t)$. Insbesondere ist γ injektiv.

   (Tipp: Wählen Sie s_0, sodass die Totalkrümmung von γ auf $[a, s_0]$ und $[s_0, b]$ jeweils kleiner als $\pi/2$ ist, sowie Koordinaten, sodass $\gamma(s_0)$ der Ursprung und die x-Achse die Tangente an $\gamma = (x(t), y(t), z(t))$ im Ursprung ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $t \to x(t)$ ein Diffeomorphismus von $[a, b]$ auf das Bild ist.)

2. (20 Punkte) Sei γ eine glatte reguläre einfach geschlossene planare Kurve, die eine Figur der Fläche π berandet. Zeigen Sie, dass die Absolutkrümmung von γ in mindestens einem Punkt gleich 1 ist.

   (Tipp: Verwenden Sie Theorem 6.17 und den Zwischenwersatz.)

3. (0 Punkte) Sei γ eine glatte reguläre einfach geschlossene planare Kurve, sodass die Absolutkrümmung von γ in jedem Punkt kleiner gleich k ist. Zeigen Sie, dass $\ell(\gamma) \geq 2\pi/k$ einmal unter Verwendung von Lemma 3.24 und einmal unter Verwendung von Theorem 6.13 sowie der isoperimetrischen Ungleichung.

4. (0 Punkte) Nehmen Sie an, eine einfach geschlossene reguläre glatte Kurve γ verläuft innerhalb eines Dreiecks $\triangle \subset \mathbb{R}^2$ dessen Inradius gleich 1 ist. Zeigen Sie, dass es auf γ einen Punkt von Absolutkrümmung mindestens 1 gibt.