Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 9
09.12.2021

Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von einem Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

Abgabe: Bis 16.12. 10 Uhr via Ilias

1. (20 Punkte) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine glatte, reguläre Kurve und $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Für die Totalkrümmung von γ gelte $\Phi(\gamma) \leq 2\theta$. Zeigen Sie, dass gilt

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| > \cos\theta \cdot \mathrm{length}(\gamma).$$

(Tipp: Parametrisieren Sie γ nach Bogenlänge. Finden Sie $s \in [a,b]$, sodass die Totalkrümmung von γ für $[a,s)$ und $(s,b]$ genau θ ist. Betrachten Sie $U = T^\gamma(s) = \gamma'(s)$. Zeigen Sie $\langle U, \gamma'(t)\rangle \geq \cos\theta$ für alle t. Schließen Sie, dass $\langle \gamma(b), U\rangle - \langle \gamma(a), U\rangle \geq \cos\theta \cdot \mathrm{length}(\gamma)$. Überlegen Sie dann, warum man $\geq$ durch $>$ ersetzen kann.)

2. (0 Punkte) Sei γ Teil einer ebenen, konvexen, einfachen Kurve. Für die Totalkrümmung gelte $\Phi(\gamma) < \pi$. Es sei $p = \gamma(a)$ und $q = \gamma(b)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{length}(\gamma) \leq 2 \cdot |p - q| \cdot \frac{1}{|N^\gamma(a) + N^\gamma(b)|}.$$

(Tipp: Betrachten Sie die Tangenten l^p und l^q und ihren Schnittpunkt x. Zeigen Sie, dass auf der rechten Seite der Ungleichung genau $|p - x| + |q - x|$ steht. Betrachten Sie anschließend die Projektion auf die durch γ begrenzte, konvexe Menge und verwenden Sie Lemma 11.4)

3. (0 Punkte) Sei $X = \mathbb{R}^2 \setminus B$, wobei B den offenen Ball $B(0,1)$ mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 in $\mathbb{R}^2$ bezeichne. Beweisen Sie, dass für $p = (-1,0)$ und $q = (1,0)$ gilt, dass $|p - q|_X = \pi$ und finden Sie in X eine Kürzeste zwischen p und q.
(Tipp: Benutzen Sie Lemma 11.4.)

4. (0 Punkte) Es sei γ eine reguläre, glatte, ebene Kurve, mit positiver, strikt monotoner Krümmung. Zeigen Sie, dass es keinen Kreis gibt, der tangential an γ in drei unterschiedlichen Punkten liegt.
(Tipp: Benutzen Sie 5.11.)