Prof. Dr. Alexander Lytchak

WS 2021/22
Blatt 11
14.01.2022

# Elementare Differentialgeometrie

Die Lösungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten abgegeben werden. Falls als Gruppe abgegeben wird, sollen die Lösungen nur von einem Gruppenmitglied bei Ilias hochgeladen werden. Auf der Abgabe ist deutlich zu machen mit welchen Studenten gemeinsam abgegeben wird. Es werden ausschließlich Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben korrigiert.

**Abgabe:** Bis 20.01. 10 Uhr via Ilias

1. (0 Punkte) Sei $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Isometrie, $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in \Sigma$. Sei $\tilde{\Sigma} = A(\Sigma)$ und $q = A(p)$. Weiter sei $n : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ ein glattes Einheitsnormalenfeld, das wir zur Orientierung von $\Sigma$ und Bestimmung des Shape-Operators benutzen.

   a) Zeigen Sie, dass $A(T_p\Sigma) = T_q(\tilde{\Sigma})$.

   b) Finden Sie mit Hilfe von $A$ eine Orientierung von $\tilde{\Sigma}$.

   c) Zeigen Sie, dass $\langle Shape_p(v), v\rangle = \langle Shape_q(w), w\rangle$ für $v \in T_p\Sigma$ und $w = A(v)$.

   d) Schließen Sie, dass $Shape_p$ und $Shape_q$ gleiche Eigenwerte haben.

   e) Beschreiben Sie, wie die Hauptkrümmungsrichtungen von $\Sigma$ in $p$ und von $\tilde{\Sigma}$ in $q$ aussehen.

2. (20 Punkte) Sei $\Sigma$ die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$. Es bezeichne $n$ das innere Einheitsnormalenvektorfeld von $\Sigma$.

   a) Benutzen Sie Aufgabe 1 um zu zeigen, dass die Hauptkrümmungsrichtungen nicht vom Punkt $p \in \Sigma$ abhängen und dass in jedem Punkt die Hauptkrümmungen übereinstimmen.

   b) Benutzen Sie 9.10. um nachzurechnen, dass $\langle Shape_p(v), v\rangle = 1$ für jeden Einheitsvektor $v \in T_p\Sigma$ gilt. Schließen Sie, dass $Shape_p$ die Identität ist.

3. (0 Punkte) Sei $\Sigma$ eine glatte Fläche, deren Orientierung durch ein Einheitsnormalenfeld $n$ definiert ist. Die Hauptkrümmungen von $\Sigma$ seien in jedem Punkt gleich 1.

   a) Zeigen Sie, dass $Shape_p(v) = v$ gilt, für alle $p \in \Sigma$ und $v \in T_p\Sigma$.

   b) Zeigen Sie, dass $p + n(p)$ konstant ist; das heißt, dass $c = p + n(p)$ nicht von $p \in \Sigma$ abhängt. Schließen Sie, dass $\Sigma$ eine Teilmenge der Einheitssphäre mit Mittelpunkt in $c$ ist.

4. (0 Punkte)

   a) Wählen Sie eine Karte in der Sphäre $\mathbb{S}^2$ und benutzen Sie 9.3. um $Shape_p$, $p \in \mathbb{S}^2$ zu berechnen.

b) Betrachten Sie das Helikoid, gegeben durch $s(u, v) = (v \cos u, v \sin u, cu)$, mit $c \neq 0$. Berechnen Sie den Shape-Operator, die Hauptkrümmungen, sowie die Gaußkrümmung des Helikoids.