KONVEXE KURVEN

1. Tangenten

1.1. **Allgemeine Beobachtung.** Wir beginnen mit einer einfachen Beobachtung, die direkt aus der Definition folgt:

Lemma 1.1. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve, t_0 sei ein Zeitpunkt im Inneren von I. Seien $u, v \in S^1$ mit $\langle u, v\rangle = 0$. Die Tangente an γ zum Zeitpunkt t_0 ist parallel zu v (d.h. $\gamma'(t_0)$ ist ein Vielfaches von v) genau dann wenn t_0 ein kritischer Punkt der folgenden Funktion ist*

$$f_u(t) := \langle \gamma(t), u\rangle \ .$$

Da die obige Funktion f immer ein Maximum und ein Minumum annimmt, wenn γ geschlossen ist, und diese auch verschieden sind, folgern wir:

Korollar 1.2. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene reguläre Kurve und sei $u \in S^1$ beliebig. Zu jedem Zeitpunkt $t_0 \in I$, in dem $f_u(t) = \langle \gamma(t), u\rangle$ ein lokales Minimum oder Maximum annimmt, hat γ eine Tangente, die zu u senkrecht ist. Insbesondere, hat γ mindestens zwei verschiedene zu u senkrechte Tangenten.*

Es ist hilfreich sich daran zu erinnern, dass die obige Funktion $f_u(x)$ die orthogonale Projektion von x auf die Gerade $\mathbb{R} \cdot u$ beschreibt.

1.2. **Konvexität.** Mit Hilfe der Tangenten läßt sich Konvexität auf verschiedene Weise charakterisieren.

Proposition 1.3. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene reguläre Kurve. Genau dann ist das Bild von γ eine konvexe Kurve, wenn für jede Tangente l an γ, die ganze Kurve γ in einem durch l bestimmten abgeschlossenen Halbraum liegt.*

Beweis. Sei zunächst für jede Tangente l_{t_0} an γ durch $\gamma(t_0)$ die ganze Kurve γ in einem Halbraum H_{t_0} enthalten. Betrachte dann den Durchschnitt B aller dieser Halbräume $\cap_{t \in I} H_t$. Als Durchschnitt konvexer abgeschlossener Teilmengen ist B konvex und abgeschlossen.

Nach Annahme und Konstruktion ist γ in B enthalten. Kein Punkt $\gamma(t_0)$ kann im Inneren von B liegen: Sonst würde die entsprechende Tangente das Innere von B in zwei nicht leere Hälften teilen und eine dieser Hälften wäre nicht in H_{t_0} enthalten, also auch nicht B, was nicht möglich ist. Also liegt das Bild von γ in ∂B. Da ∂B homöomorph zu einem Kreis oder $\mathbb{R}$ ist und γ regulär ist, folgern wir (hierbei spielen einige topologische Überlegungen eine Rolle, die anschaulich klar sein sollten und ausgelassen werden), dass das Bild von γ eine in ∂B offene Teilmenge ist. Da dieses Bild auch kompakt und ∂B zusammenhängend ist, schließen wir, dass ∂B mit dem Bild von γ übereinstimmt.

Sei andererseits das Bild von γ der Rand ∂B einer konvexen kompakten Teilmenge B von $\mathbb{R}^2$. Sei $x_0 = \gamma(t_0)$. Angenommen, es gibt Punkte in B in den beiden offenen durch die Tangente $l = l_{t_0}$ bestimmten Halbebenen $H^{\pm}$. Dann gibt es auch innere Punkte $x^{\pm}$ von B, die in $H^{\pm}$ enthalten sind. Die Strecke zwischen x^+ und x^- schneidet l in einem Punkt y, der ein innerer Punkt von B ist. Dann liegt ein Ball B_0 um y in B.

Wir folgern, dass für ein positives $\delta > 0$, jede Strecke der Länge δ, die in x startet und mit $[x, y]$ einen Winkel $< \delta$ einschließt, in der Menge der inneren Punkte von B enthalten ist. Dann können l und γ nicht Kontakt erster Ordnung im Punkte x haben, ein Widerspruch.

Also ist ganz B und damit auch das Bild von γ in einer der durch die Tangente an x_0 bestimmten Halbebenen enthalten. □

Proposition 1.4. *Eine geschlossene reguläre Kurve γ ist eine konvexe Kurve genau dann, wenn es für jeden Einheitsvektor v genau zwei zu v parallele Tangenten an γ gibt.*

Beweis. Wie Lemma 1.1 zeigt, ist die Annahme äquivalent dazu, dass für jedes $u \in S^1$ die Funktion

$$f_u(t) = \langle \gamma(t), u \rangle$$

genau zwei verschiedene lokale Extremalwerte hat, d.h., wenn jeder extremale Punkt von f_u ein globales Maximum oder ein globales Minimum von f_u definiert.

Die Aussage, dass f_u ein globales Maximum oder Minimum in t_0 annimmt, ist genau die Aussage, dass γ in einem der beiden durch die Gerade l_{t_0} bestimmten Halbebenen liegt.

Also folgt die Aussage aus Proposition 1.3. □

1.3. **Projektionen.** Die folgende Aussage gilt auch für nicht reguläre Kurven und wurde im Kapitel über die Crofton-Formel implizit benutzt. Hier besprechen wir sie nur für reguläre Kurven.

Proposition 1.5. *Sei γ eine einfach geschlossene reguläre Kurve. Genau dann ist γ konvex, wenn die folgende Aussage gilt:*

Für jedes $u \in S^1$ hat die Funktion $f_u(x) = \langle x, u \rangle$ als Bild $f_u(\gamma)$ ein Intervall $I_u = [a_u, b_u]$ und das Urbild von jedem $s \in (a_u, b_u)$ hat in γ genau zwei Urbilder.

Beweis. Sei zunächst γ nicht konvex. Dann finden wir Punkte p, q im Inneren des von γ begrenzten Gebietes U, so dass die Strecke $[p, q]$ nicht in U enthalten ist. Dann schneidet die Strecke $[p, q]$ die Kurve γ und die Fortsetzung von $[p, q]$ zu einer Geraden l schneidet γ in mindestens 2 weiteren Punkten. Die Gerade l schneidet γ also in mindestens 3 Punkten. Ferner enthalten die beiden durch l bestimmten offenen Halbebenen Punkte aus γ.

Für einen zu l senkrechten Vektor $u \in S^1$, wird unter der Funtkion f_u, die Gerade l auf einen Punkt $s \in (a_u, b_u)$ abgebildet. Das Urbild von s in γ hat mindestens 3 Elemente.

Sei andererseits γ konvex und u gegeben. Seien l^+ und l^- die beiden zu u senkrechten Tangenten an γ, siehe Proposition 1.4. Bei der Projektion auf $\mathbb{R} \cdot u$ werden l^+ und l^- genau auf a_u und b_u abgebildet.

Das Komplement von $l^+ \cup l^-$ in γ ist eine Vereinigung von zwei offenen einfachen Kurven γ^+ und γ^-. Da $\langle u, \gamma(t) \rangle$ keine kritischen Werte außer a_u und b_u besitzt, hat (für jede reguläre Parametrisierung von $\gamma^\pm$) die Funktion $f_u(t)$ keine kritischen Punkte auf $\gamma^\pm$. Also sind die beiden Funktionen $f_u \circ \gamma^\pm$ strikt monoton. Nach dem Zwischenwertsatz hat dann jeder Punkt in (a_u, b_u) genau ein Urbild unter f_u in γ^+ und ein Urbild unter f_u in γ^-. □