TAYLOR-ENTWICKLUNGEN

1. Krümmung als erster Störungsterm

1.1. **Taylorformel.** Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve und $t_0 \in I$. Für jedes m können wir die Kurve $\gamma(t)$ in der Nähe von t_0 mit der Taylorformel entwickeln:

$$\gamma(t_0+\epsilon) = \gamma(t_0) + \epsilon \cdot \gamma'(t_0) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \cdot \gamma''(t_0) + ... + \frac{1}{m!}\epsilon^m \cdot \gamma^{(m)}(t_0) + o(\epsilon^m) \ .$$

Mit dem Landausymbol $o(t^m)$ bezeichnen wir jede Funktion $f : J \to \mathbb{R}^n$, für ein Intervall J, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\lim_{t\in J\setminus\{0\}, t\to 0} \frac{|f(t)|}{t^m} = 0 \ .$$

Nun kann man das Skalarprodukt ausmultiplizieren (die Formel werden wir nur für $m \leq 3$ benutzen)

$$|\gamma(t_0+\epsilon)|^2 = |\gamma(t_0)|^2 + 2\epsilon\cdot\langle\gamma(t_0), \gamma'(t_0)\rangle + \epsilon^2\cdot\Big(\langle\gamma(t_0), \gamma''(t_0)\rangle + \langle\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)\rangle\Big) +$$

$$+.... + \epsilon^m \cdot \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!\cdot(m-k)!}\cdot\langle\gamma^{(k)}(t_0), \gamma^{(m-k)}(t_0)\rangle\right) + o(\epsilon^m)$$

Wenn $\gamma(t)$ konstante Norm hat (zum Beispiel, wenn γ sphärisch ist), so müssen alle Terme bis auf den ersten verschwinden, also

$$\langle\gamma(t_0), \gamma'(t_0)\rangle = \langle\gamma(t_0), \gamma''(t_0)\rangle + \langle\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)\rangle = ... = 0 \,.$$

Wendet man das auf die Ableitung einer nach *Bogenlänge parametrisierten Kurve* γ an, so erhält man

$$\langle\gamma', \gamma''\rangle = \langle\gamma', \gamma'''\rangle + \langle\gamma'', \gamma''\rangle = ... = 0 \,. \tag{1.1}$$

Wenn Sie das Rechnen mit Landau-Symbolen nicht mögen, können Sie direkt induktiv die höheren Ableitungen des Skalarproduktes ausrechnen, um auf dieselben Formeln zu kommen.

1.2. **Abstand zu Teilmengen.** Wir führen die folgende Bezeichnung ein. Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir mit $d_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Abstandsfunktion zur Teilmenge A, also

$$d_A(x) := \inf_{a \in A} |x - a| \ .$$

Ist l eine Gerade (bzw. Ebene) durch den Ursprung, so gilt $d_l(x) = |P(x)|$, wobei $P = P^{l^\perp}$ die orthogonale Projektion auf das orthogonale Komplement (Ebene bzw. Gerade) von l bezeichnet.

1.3. **Abstand zur Tangente.** Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve. Die Tangente l an $\gamma(t_0)$ ist die Gerade $l(s) = \gamma(t_0) + s \cdot \gamma'(t_0)$.

Es gilt $d_l(\gamma(t_0+\epsilon)) \leq |l(\epsilon) - \gamma(t_0+\epsilon)| = o(\epsilon)$. Wir wollen nun diesen Abstand bis zur nächsten Ordnung abschätzen und dürfen dafür ohne Einschränkung (nach einer Translation) $\gamma(t_0) = 0$ annehmen.

Dann gilt, wenn wir wieder mit

$$P(z) = P^{l^\perp} = z - \langle z, \gamma'(t_0) \rangle \gamma'(t_0)$$

die Projektion auf das orthogonale Komplement von l bezeichnen:

$$d_l(\gamma(t_0+\epsilon)) = |P(\gamma(t_0+\epsilon)| = |\epsilon \cdot P(\gamma'(t_0)) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \cdot P(\gamma''(t_0)) + o(\epsilon^2)| \ .$$

Nun ist aber $P(\gamma'(t_0)) = 0$ und $P(\gamma''(t_0)) = \gamma''(t_0)$, weil γ'' und γ' orthogonal sind. Also erhalten wir

$$d_l(\gamma(t_0+\epsilon)) = \frac{1}{2}|\gamma''(t_0)| \cdot \epsilon^2 + o(\epsilon^2) = \frac{\kappa(t_0)}{2} \cdot \epsilon^2 + o(\epsilon^2) \ .$$

Damit beschreibt die Krümmung, wie schnell (in erster nicht-verschwindender Ordnung) sich die Kurve von der Tangente entfernt.

1.4. **Abstand vom Startpunkt.** Sei die Kurve γ wie oben. Um die Formeln zu vereinfachen, nehmen wir wieder ohne Einschränkung $\gamma(t_0) = 0$ an. Ferner nehmen wir $t_0 = 0$ an und lassen t_0 in den Formeln weg. Wir nehmen letztlich an, dass die Kurve γ einfach ist, was wir nach Reduktion des Definitionsintervals immer annehmen können.

Der "intrinsische" Abstand $|\gamma(\epsilon) - 0|_\gamma$ ist nach Definition der Bogenlänge genau ϵ. Der äußere Euklidische Abstand $|\gamma(\epsilon) - 0|_{\mathbb{R}^3} = |\gamma(\epsilon)|$ ist nicht größer als der intrinsische Abstand ϵ. Die Verzerrung

$$|\gamma(\epsilon) - 0|_\gamma - |\gamma(\epsilon) - 0|_{\mathbb{R}^3} = |\epsilon| - |\gamma(\epsilon)|$$

wird in erster nicht verschwindender Näherung wieder durch die Krümmung bestimmt, wie wir jetzt zeigen. Wegen Pythagoras gilt

$$|\gamma(\epsilon)|^2 = |P(\gamma(\epsilon))|^2 + |\langle \gamma(\epsilon), \gamma'(0) \rangle|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\kappa^2 \cdot \epsilon^4 + \left(\epsilon + \frac{1}{6}\epsilon^3 \cdot \langle \gamma'(0), \gamma'''(0)\rangle\right)^2 + o(\epsilon^4)\ .$$

Nun gilt aber

$$\langle \gamma', \gamma''' \rangle = -\langle \gamma'', \gamma'' \rangle\ .$$

Also erhalten wir

$$|\gamma(\epsilon)|^2 = \epsilon^2 (1 + \epsilon^2 (\frac{\kappa^2}{4} - \frac{\kappa^2}{3}) + o(\epsilon^2))\ .$$

$$|\gamma(\epsilon)| = |\epsilon| \cdot \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{12} \cdot \epsilon^2 + o(\epsilon^2)} = |\epsilon| - \frac{\kappa^2}{24} \cdot |\epsilon|^3 + o(\epsilon^3)\ .$$

2. Kontakt der Ordnung m zwischen Kurven

Zwei parametrisierte glatte Kurven $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ und $\eta : J \to \mathbb{R}^3$ haben Kontakt der Ordnung m zum Zeitpunkt $t_0 \in I \cap J$, wenn $\gamma(t_0) = \eta(t_0)$ gilt und für alle $1 \leq k \leq m$ die Ableitungen $\gamma^{(k)}(t_0) = \eta^{(k)}(t_0)$ übereinstimmen.

Wegen der Taylorformel ist es äquivalent zu

$$|\gamma(t_0 + \epsilon) - \eta(t_0 + \epsilon)| = o(\epsilon^m)\ .$$

Der Beweis der folgenden Aussage ist etwas technisch und nicht besonders wichtig. Es ist wichtiger die Aussage zu verstehen.

Proposition 2.1. *Seien $\tilde{\gamma}, \tilde{\eta}$ einfache reguläre Kurven, $x_0 \in \tilde{\gamma} \cap \tilde{\eta}$ und m eine natürliche Zahl. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *Es gibt Parametrisierungen γ von $\tilde{\gamma}$ und η von $\tilde{\eta}$ die Kontakt der Ordnung m zum Zeitpunkt t_0 haben, mit $\gamma(t_0) = \eta(t_0) = x_0$.*
(2) *γ, η in (1) können zusätzlich als Parametrisierungen nach Bogenlänge gewählt werden.*
(3) *Für $x \in \tilde{\gamma}$ gilt $d_{\tilde{\eta}}(x) = o(|x - x_o|^m)$.*

Beweis. Aus (2) folgt offensichtlich (1).

Sind γ und η beliebige Parametrisierungen, wie in (1), so gilt für $x = \gamma(t)$, die Gleichheit $o(|x - x_0|^m) = o(|t - t_0|^m)$, wie man aus Kapitel 1.4 oben ableiten kann. Die Aussage (3) folgt nun aus

$$d_\eta(x) \leq |\gamma(t) - \eta(t)| \leq o(|t - t_0|^m)\ .$$

Sei nun (3) erfüllt. Seien γ und η Parametrisierungen von $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\eta}$ nach Bogenlänge, so dass $x_0 = \gamma(0) = \eta(0)$.

Wir gehen induktiv nach m vor und fangen mit $m = 1$ an. Weil γ zu seiner Tangente und η zu seiner Tangente an $\gamma(0) = \eta(0)$ Kontakt der Ordnung 1 hat, hat die Tangente an γ Kontakt der Ordnung 1 mit der Tangente an η (im Punkte x_0, im Sinne der Formulierung (3)). Nun haben aber zwei Gerade Kontakt der Ordnung 1 nur wenn sie übereinstimmen. Also stimmen die Tangenten an γ und η in x_0 überein. Nach eventueller Änderung der Orientierung von η (die wir ab jetzt fixieren) gilt dann $\gamma'(0) = \eta'(0)$. Also gilt die Aussage für $m = 1$.

Sei nun die Aussage für $m-1$ bewiesen. Nach Induktionsannahme gilt $\gamma^{(k)}(0) = \eta^{(k)}(0)$ for $k = 1, ..., m-1$. Wegen (1.1) und der Annahme, dass γ und η nach Bogenlänge parametrisiert sind, folgt

$$\langle \gamma'(0), \gamma^{(m)} \rangle = \langle \gamma'(0), \eta^{(m)} \rangle \ .$$

Sei $\eta(\delta)$ ein Punkt auf $\tilde{\eta}$ der den Abstand von $\gamma(\epsilon)$ zu $\tilde{\eta}$ realisiert, also ein Punkt mit $|\eta(\delta) - \gamma(\epsilon)| = o(\epsilon^m)$. Induktiv (siehe unten im Beweis) können wir $\delta - \epsilon = o(\epsilon^{m-1})$ annehmen. Aus der Taylorformel sehen wir nun

$$o(\epsilon^m) = (\delta - \epsilon) \cdot \gamma'(0) + \frac{\epsilon^m}{m!} \cdot (\eta^{(m)}(0) - \gamma^{(m)}(0)) \ .$$

Nehmen wir das Skalarprodukt mit $\gamma'(0)$, so folgt $\delta - \epsilon = o(\epsilon^m)$, da

$$\langle \gamma'(0), \eta^{(m)}(0) - \gamma^{(m)}(0) \rangle = 0 \ .$$

Damit folgt nun aus der obigen Gleichung auch $\eta^{(m)}(0) = \gamma^{(m)}(0)$. $\square$

3. Torsion als erster Störungsterm

Wir haben oben gesehen, dass die Krümmung die "erste" infinitesimale Abweichung einer Kurve von "Geradelinigkeit" beschreibt. In einer ähnlichen Weise beschreiben wir nun die Torsion als die erste infinitesimale Abweichung einer Kurve von "Planarität".

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve und sei $t_0 \in I$. Der Einfachheit halber wählen wir $t_0 = 0$ und $\gamma(t_0) = 0$ (wie führt man den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall zurück?).

Sei Π eine Ebene durch den Punkt $0 = x_0 = \gamma(t_0) = \gamma(0)$ und sei B ein zu Π senkrechter Einheitsvektor.

Die Abweichung der Kurve γ von der Ebene Π wird durch

$$d_\Pi(\gamma(t)) = |\langle B, \gamma(t) \rangle|$$

beschrieben. Also gilt

$$d_\Pi(\gamma(\epsilon)) = |\epsilon \cdot \langle \gamma'(0), B \rangle + \frac{\epsilon^2}{2} \cdot \langle \gamma''(0), B \rangle + \frac{\epsilon^3}{6} \cdot \langle \gamma'''(0), B \rangle| + o(\epsilon^3) \ .$$

Genau dann gilt also $d_\Pi(\gamma(\epsilon)) = o(\epsilon^3)$, wenn die Ebene Π die drei Vektoren $\gamma'(0), \gamma''(0), \gamma'''(0)$ enthält. So eine Ebene gibt es genau dann, wenn die ersten drei Ableitungen nicht linear unabhängig sind, zum Beispiel, wenn $\kappa(0) = |\gamma''(0)|$ verschwindet.

Sei nun $\kappa(0) \neq 0$. Dann sind $\gamma''(0)$ und $\gamma'(0)$ linear unabhängig und die von ihnen erzeugte Ebene $\Pi_0 = \Pi$, die sogenannte *Schmiegebene (Englisch: osculating plane)* ist die einzige Ebene, für die

$$d_\Pi(\gamma(\epsilon)) = o(\epsilon^2)$$

gilt. (An diese Ebene schmiegt sich die Kurve besonders eng an).

Die erste nicht-verschwindende Abweichung der Kurve γ von der Schmiegebene Π ist also $|\frac{\epsilon^3}{6}\langle\gamma'''(0), B\rangle|$. Da Π die Schmiegebene ist, können wir B als *Binormalenvektor* $B = T \times N$, mit $N = \frac{\gamma''(0)}{|\gamma''(0)|}$ wählen. Wir rechnen dann durch Ableiten aus

$$|\langle\gamma'''(0), B\rangle| = \langle(\kappa \cdot N)'(0), B\rangle = \kappa \cdot \tau \ .$$

Insgesamt erhalten wir (nun wieder für allgemeines t_0 und $\gamma(t_0)$ formuliert), dass der Abstand der Kurve von der Schmiegebene Π_{t_0} gegeben ist durch

$$d_{\Pi_{t_0}}(\gamma(t_0 + \epsilon)) = \frac{\kappa(t_0) \cdot \tau(t_0)}{6} \cdot |\epsilon|^3 + o(\epsilon^3) \ .$$