典型群的 Schur 代数

（申请清华大学理学博士学位论文）

培 养 单 位： 数 学 科 学 系

学　　　科： 数 学

研　究　生： 刘 群 华

指 导 教 师： 肖 杰 教 授

二〇〇七年四月

Schur algebras of classical groups

Dissertation Submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Science

by

Liu Qunhua

(Mathematics)

Dissertation Supervisor: Professor Xiao Jie

April, 2007

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆报送可以公开的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

作者签名：____________ 导师签名：____________

日　　期：____________ 日　　期：____________

摘 要

本文的研究对象是特征不等于 2 的代数封闭域 K 上典型群的 Schur 代数 $S^X(n,r)$，其中 X 代表 A、B、C 或 D 为典型群 G 的类型，n 为 G 中矩阵的阶，$r \geqslant 0$ 为非负整数。本文感兴趣的是 $S^X(n,r)$ 的代数结构以及与 G 的超代数（hyperalgebra）之间的关系，主要有如下三个方面的结果。

设 E 是 G 的标准表示。对 $r \geqslant 1$，张量积 $E^{\otimes r}$ 有一个以 Weyl 模为截面的滤，记 $\pi^X(n,r)$ 为其中 Weyl 模的最高权的集合，这是 G 的支配权集的子集且不依赖于域 K 的选取。本文的第一个结果是：通过在 K 取复数域时利用 Littelmann 的道路模型进行张量积分解而大大简化了集合 $\pi^X(n,r)$的计算（比较 Weyl [1]）。这对于研究 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 的结构至关重要。在复数域上，$S^X(n,r)$ 是半单的，集合 $\pi^X(n,r)$ 描述了它的分块情况。一般地，我们证明了 A、C、D 型时集合 $\pi^X(n,r)$ 是饱和的（而 B 型不是），且此时 Schur 代数是典型群 G 的相应于 $\pi^X(n,r)$ 的广义 Schur 代数，从而是拟遗传代数。这样我们拓展并重新证明了 J. A. Green [2]对于 A 型和 Donkin [3]对于 C 型的结果。同时我们对 G 的相似群证明了类似的结论。

第二，通过用余代数的途径构造 Schur 代数之间的满射 $S^X(n,n+r) \twoheadrightarrow S^X(n,r)$，我们把固定某个典型群 G 的 Schur 代数 $S^X(n,r)$（$r \geqslant 0$）纳入了一个逆系统，并且把 G 的超代数实现为其逆极限的子代数。这推广了 Beilinson，Lusztig 和 MacPherson [4]关于 A 型 Schur 代数的结论。在 B、C、D 型，我们还构造了满射 $S^X(n,r+2) \twoheadrightarrow S^X(n,r)$，从而得到了与上面相容的新的逆系统。我们证明了 A、C、D 型时这些满射与 Schur 代数的拟遗传结构相容。特别地，当域 K 为复数域时，利用 Schur 代数的半单性我们显示地给出了其逆极限。

第三，通过利用 Weyl 特征标公式和 Schur 代数的余代数实现，我们具体地计算和比较了若干当参数 n 或 r 较小时的 Schur 代数。我们还证明了一种特殊情况（即参数 $r=2$）下关于正交群、辛群和 Brauer 代数之间的双中心性质。

关键词: Schur 代数；　典型群；　广义 Schur 代数；　典型群的超代数

Abstract

We consider the Schur algebra $S^X(n,r)$ of the classical group G over the algebraically closed field K of characteristic not 2, where X stands for A, B, C, D the type of G, n the size of matrices in G, and $r \geqslant 0$ a non-negative integer. We are interested in the algebra structure of $S^X(n,r)$ and the relation with the hyperalgebra of G. The main results we obtained are as followed.

Let E be the standard representation of G. For $r \geqslant 1$, the tensor product $E^{\otimes r}$ has a filtration with sections being Weyl modules. Let $\pi^X(n,r)$ be the set of highest weights of those Weyl modules appeared in $E^{\otimes r}$. It is a set of dominant weights independent of the base field. The first part of our work is — to compute the set $\pi^X(n,r)$ explicitly by using Littelmann's path model over the complex number field. This greatly reduces the calculation of Weyl [1]. The set $\pi^X(n,r)$ is crucial for understanding the structure of $S^X(n,r)$. Over the complex number field, Schur algebras are semisimple and $\pi^X(n,r)$'s describe their block decomposition. In general, we show that in types A, C, D the sets $\pi^X(n,r)$ are saturated (while NOT in type B), and the Schur algebras are generalized Schur algebras of G associated with $\pi^X(n,r)$. In particular, they are quasi-hereditary. This extends and reproves in a uniform way results of Green [2] in type A and of Donkin [3] in type C. At the same time, we prove the similar results for the group of similitudes of G.

Secondly, by constructing surjections between Schur algebras $S^X(n,n+r) \twoheadrightarrow S^X(n,r)$ using the coalgebra approach, we form an inverse system from the Schur algebras of a certain fixed classical group G and realize the hyperalgebra of G as a subalgebra of the inverse limit. This generalizes the work of Beilinson, Lusztig and MacPherson [4] in type A. Moreover, in types B, C, D, we construct surjections $S^X(n,r+2) \twoheadrightarrow S^X(n,r)$ and hence form a new inverse system which is compatible with the previous one. In types A, C, D, these surjections are proved to be compatible with the quasi-hereditary structure of the Schur algebras. When $K = \mathbb{C}$ is the complex number field, we obtain the inverse limit explicitly by the semi-simplicity of Schur algebras.

Thirdly we calculate some Schur algebras when the parameter n or r is small, by using Weyl's character formula and the coalgebra approach. We also prove the Schur–Weyl duality for the orthogonal and symplectic groups in the special case $r = 2$.

Keywords: Schur algebra; classical group; generalized Schur algebra; hyperalgebra

目　录

第 1 章　引言

1.1 选题背景与国内外研究现状

Schur 代数是1980年 J. A. Green 引入的 [2]，该名著推广了1901年 Schur 的博士论文 [5]的工作（其中仅考虑了复数域的情形），研究了任意无限域 K 上一般线性群 $GL_n(K)$ 的多项式表示。对任意非负整数 r，$GL_n(K)$ 的 r 次齐次多项式表示范畴等价于 Schur 代数 $S_K(n,r)$（有限维结合代数）的模范畴。当 r 取遍所有的非负整数时，我们就得到了 $GL_n(K)$ 的所有多项式表示。这样无限群 $GL_n(K)$ 的表示问题就转化为了（无限多个）有限维代数的表示问题。

Schur–Weyl 对偶是 Schur 代数最优美的性质之一：记 E 为 $GL_n(K)$ 的标准表示，则对任意正整数 r，$GL_n(K)$ 在张量积空间 $E^{\otimes r}$ 上的对角作用与对称群 Σ_r 在 $E^{\otimes r}$ 上通过位置交换定义的右作用可交换，并且二者的群代数在表示映射下的像互为中心化子（Schur 代数 $S_K(n,r)$ 就是群代数 $KGL_n(K)$ 的像，从而可以定义为 $E^{\otimes r}$ 在对称群上的自同态代数）。复数域 $\mathbb{C}$ 上的情形是 Schur 于 1927 年发现的 [6]，通过这种方法他极其经济地重新证明了 1901 年的结果。后来被 Weyl 加以推广 [1]，并称为“双中心性质”。在任意特征情形下的推广见文献 [7]。

通过 Schur–Weyl 对偶，Schur 代数成为联系一般线性群 $GL_n(K)$（无限群）和对称群 Σ_r（有限群）的纽带。尽管在复数域上二者的表示已尽为人知，但是当基域特征大于零时这一领域仍充满了未知情况。根据 James [8]和 Erdmann [9]，$GL_n(K)$ 的分解数与 Σ_r（所有 r）的分解数彼此相互决定。

当把一般线性群 $GL_n(\mathbb{C})$ 换成其子群正交群 $O_n(\mathbb{C})$、辛群 $SP_n(\mathbb{C})$（C 型典型群，此时 n 为偶数）和特殊正交群 $SO_n(\mathbb{C})$ （n 奇数时为 B 型典型群，偶数时为 D 型）时，通过把对称群的群代数换成更大的代数，相应的双中心性质依然成立 [10, 11]。任意无限域上辛群的双中心性质直到最近才由 Dipper，Doty 和胡峻证明 [12]，而任意域上正交群的双中心性质还是一个公开的难题。本文的结果之一将证明参数 $r=2$ 时（特殊）正交群和辛群的 Schur–Weyl 对偶。

类比于一般线性群 $GL_n(K)$（即 A 型典型群 $SL_n(K)$ 的相似群），B、C、D 型典型群（或者其相似群）的群代数在张量积空间 $E^{\otimes r}$（其中

E 为标准表示）的表示映射下的像被称为相应典型群的 Schur 代数，Doty 证明它们刻划了相应典型群和相似群的多项式表示 [13]。

上个世纪八、九十年代是数学史上“量子化”的年代，Schur 代数也不例外，量子 Schur 代数可以被用于刻划有限域上典型群的模表示（A 型如 [14, 15]，B 型如 [16–18]，C 型如 [19]）。有关 Schur–Weyl 对偶的量子化可见文献 [14, 21–25]。

把 Schur 代数推广到一般的代数群，并用以研究代数群的表示是 Donkin 率先提出的 [26–30]。设 G 是任意约化代数群，对 G 的一个有限、饱和的支配权集 π，Donkin 定义广义 Schur 代数 $S(\pi)$ 为坐标环 $K[G]$ 的某个由 π 决定的余子代数的线性对偶。这是一个有限维的结合代数，Donkin 发现其模范畴是 G 上有理表示范畴的对扩张封闭的满子范畴，并且是高权范畴 [26]，这本质上证明了广义 Schur 代数的拟遗传性。事实上拟遗传代数的概念是稍晚些才由 Cline，Parshall 和 Scott 正式引入的 [31, 32]。这类代数具有很好的性质，如具有有限整体维数 [27, 31]，有倾斜（tilting）模 [33]（从而可以考虑其 Kazhdan-Lusztig 理论 [34]）等。

根据 Donkin 的定义，A 型 Schur 代数 $S_K(n, r)$ 自然是 $SL_n(K)$ 和 $GL_n(K)$ 的广义 Schur 代数，相应的权集由 r 分成最多 n 份的剖分给出。Donkin 随后证明了 C 型 Schur 代数是辛群的广义 Schur 代数，并计算了相应的权集 [3, pp. 77]。人们自然的猜测 B、D 型的 Schur 代数也是相应典型群的广义 Schur 代数，而本文将给出一个出人意料的回答：B 型 Schur 代数不是广义 Schur 代数，并统一地证明 A、C、D 型的 Schur 代数是广义 Schur 代数。

近来，Schur 代数自身的结构和表示性质日益引起数学家们浓厚的兴趣。如 A 型 Schur 代数的拟遗传结构 [35]、表示型 [36]、块理论 [29, 30]和整体维数 [37]等，C 型 Schur 代数的拟遗传结构 [38]，典型群的 Schur 代数（和广义 Schur 代数）生成元和生成关系的实现 [39–41]等。

Schur 代数是为了研究一般线性群（典型群）的表示而引入的，一个自然的问题就是如何（或者能否）从 Schur 代数中直接恢复一般线性群（典型群）的信息？为此方明、Henke 和 König 比较了不同次（即参数 r）的 Schur 代数之间的关系 [42–44]。Beilinson，Lusztig 和 MacPherson 构造了 A 型 q-Schur 代数之间次数相差 n 的满射 $S_q(n, n+r) \twoheadrightarrow S_q(n, r)$，从而把 $S_q(n, r)$（$r \geqslant 0$）纳入了一个逆系统，并且证明了 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 的量子包络代数包含在其逆极限中 [4]（取量子参数 $q = 1$ 可知 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 的泛包络代数包含在复数域上 Schur 代数的逆极限中），也见

于 [45–47]。Oehms 构造了 C 型 q-Schur 代数之间次数相差 2 的满射，并猜测类似的结论成立 [19, pp. 37]。本文将对所有典型群的 Schur 代数考虑这一问题。

如上所述，典型群的 Schur 代数有机地联系了典型群、典型李代数、对称群和 Brauer 代数，是当前代数表示论中非常活跃的研究领域。

1.2 论文的研究方法与主要工作

本文研究了特征不等于 2 的代数封闭域 K 上典型群（主要是 B、C、D 型，A 型的结果是已知的）的 Schur 代数。设 G 是域 K 上的典型群，n 是 G 在标准形式下矩阵元素的阶，E 是 G 的标准表示（即 E 是 K 上 n 维列向量空间，G 通过矩阵左乘自然的作用在 E 上）。对正整数 $r \geqslant 1$，G 对角作用在张量积空间 $E^{\otimes r}$ 上，相应的 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 定义为表示映射

$$\rho^r : KG \longrightarrow End_K(E^{\otimes r})$$

的像，其中 $X = A$、B、C 或 D 为 G 的类型。约定 $S^X(n,0) = K$。

本文的主要工作分为如下三个方面：

1.2.1 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 的代数结构

注意到 E 是一个单 Weyl 模，而代数群的 Weyl 模的张量积有一个以 Weyl 模为截面的滤。记 $\pi^X(n,r)$ 为张量积 $E^{\otimes r}$ 的截面 Weyl 模的最高权的集合，这是 G 的支配权集的子集且不依赖于基域的选取。当 $K = \mathbb{C}$ 为复数域时，通过微分，G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 作用在 $E = \mathbb{C}^n$ 和 $E^{\otimes r} = (\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 上，Schur 代数等于表示映射

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow End_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^n)^{\otimes r})$$

的像，其中 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数。此时张量积 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 是半单表示，集合 $\pi^X(n,r)$ 为其单直和项的最高权的集合。于是如何做张量积的直和分解成为计算 $\pi^X(n,r)$ 的关键，Littelmann 的道路模型 [48]为我们提供了解决的方法。

设 λ、μ 是任一可对称化的Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$ 的支配权，$V(\lambda)$、$V(\mu)$ 分别是最高权为 λ、μ 的既约表示。道路模型刻画了张量积 $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ 的直和分解。取 $\mathfrak{g}$ 为典型李代数，注意到标准表示 $\mathbb{C}^n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的最高权为 ε_1 的既约表示，

于是张量积 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 的分解可通过归纳地运用道路模型法得到（见定理 3.1）。

权集 $\pi^X(n,r)$ 对于理解 Schur 代数的结构至关重要。在复数域 $\mathbb{C}$ 上，$S^X(n,r)$ 是半单的且

$$S^X(n,r) \;\cong \bigoplus_{\lambda\in\pi^X(n,r)} \mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C}),$$

其中 d_λ 是既约表示 $V(\lambda)$ 的维数（见推论 3.4）。一般地，我们证明了 A、C、D 型的集合 $\pi^X(n,r)$ 是饱和的（即对取在支配序下更小的支配权封闭），而 B 型不是（见引理 3.3）；并且 A、C、D 型的 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 是相应典型群的由 $\pi^X(n,r)$ 决定的广义 Schur 代数（见定理 3.2），从而是拟遗传代数，集合 $\pi^X(n,r)$ 提供了单模的同构类，且偏序为支配序。

一般线性群 $GL_n(K)$ 是 A 型典型群 $SL_n(K)$ 的相似群，二者在 $E^{\otimes r}$ 的表示映射下的像定义了相同的 Schur 代数。类似地，我们也考虑了 B、C、D 型的典型群 G 的相似群 G^0，并给出了 $E^{\otimes r}$ 在 G^0 上的权集 $\pi_0^X(n,r)$，我们发现 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 也是 G^0 上的由 $\pi_0^X(n,r)$ 决定的广义 Schur 代数（见定理 3.2）。

Schur 代数 $S^X(n,r)$ 有另一种等价定义，即余代数的线性对偶（见推论 3.1）。该余代数就是 G（和 G^0）的多项式表示 $E^{\otimes r}$ 的系数空间，同时也是 G（和 G^0）的坐标环的“齐次部分”$K[G]_r^0$（和 $K\langle G^0\rangle_r$），即 r 次齐次多项式集合 $(K[c_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n})_r$ 到 G（和 G^0）上的限制，其中 c_{ij} 为把 n 阶矩阵映为其 (i,j)-位置分量的坐标函数。因为余代数有整基，故 Schur 代数也有整基。

1.2.2 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 与超代数（hyperalgebra）之间的关系

考虑 n 次齐次多项式 $\det = \sum_{\sigma\in\Sigma_r}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n c_{i,\sigma(i)} \in K[c_{ij}]_r$，它把一个 n 阶矩阵映为其行列式。我们证明了乘以 det 诱导了余代数之间的单射 $(\cdot\det): K\langle G^0\rangle_r \hookrightarrow K\langle G^0\rangle_{n+r}$，取其对偶可得 Schur 代数之间的满射

$$(\cdot\det)^* : S^X(n,n+r) \twoheadrightarrow S^X(n,r)。$$

这样 $\forall\, i = 0,1,\ldots,n-1$，集合 $\{S^X(n,kn+i) : k \geqslant 0\}$ 成为以非负整数（自然序）为指标集的逆系统。

事实上，任给 G^0 上的一维多项式表示，其系数函数均可以像 det 一样用来

构造逆系统。在类型非 A 时，受 Oehms [19]和 Hayashi [20]的启发，我们考虑了一个 2 次齐次多项式 c_0（见 2.2节定义）：类型为 B、D时，它把 $G^0=SO_n^0(K)$ 中的矩阵 M 映为 $M^{tr}JM$ 的第 $(1,n)$-分量，其中 J 是所有 $(i,n+1-i)$ 位置取 1、其余位置取零的对阵矩阵；类型为 C 时，它把 $G^0=SP_{n=2m}^0(K)$ 中的矩阵 M 映为 $M^{tr}J'M$ 的第 $(1,n)$-分量，其中 J' 所有 $(i,n+1-i)$ 位置取 $\epsilon(i)$、其余位置取零的反对阵矩阵（当 $1\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}$ 时 $\epsilon(i)=1$，当 $\frac{n}{2}<i\leqslant n$ 时 $\epsilon(i)=-1$）。多项式 c_0 诱导了 Schur 代数之间的满射

$$(\cdot c_0)^*: S^X(n,r+2)\twoheadrightarrow S^X(n,r),$$

从而对 $i=0,1$，集合 $\{S^X(n,2k+i):k\geqslant 0\}$ 是以非负整数为指标集的逆系统。

不难发现，类型为 B、C、D 时，Schur 代数之间的满射 $(\cdot\det)^*$ 和 $(\cdot c_0)^*$ 相容，从而上面两种逆系统相容（见命题 4.3）。并且类型为 A、C、D 时，$(\cdot\det)^*$ 和 $(\cdot c_0)^*$ 与 Schur 代数的拟遗传结构相容，即满射的核恰为 Schur 代数遗传链中的理想（见推论 4.4）。

我们证明了典型群 G 的超代数作为子代数被包含在 Schur 代数的逆极限中（见定理 4.2）。特别地，在复数域上，Schur 代数的满射 $(\cdot\det)^*$ 由权集的包含关系 $\pi^X(n,r)\subseteq\pi^X(n,n+r)$ 诱导，满射 $(\cdot c_0)^*$ 由 $\pi^X(n,r)\subseteq\pi^X(n,r+2)$ 诱导（类型为 B、C、D），并且此时 Schur 代数的逆极限有着显示的形式（见 4.1节）。

1.2.3 关于若干 Schur 代数的计算

在复数域 $\mathbb{C}$ 上，利用 Weyl 特征标公式我们计算了线性代数群 $SL_2(\mathbb{C})$、$SO_3(\mathbb{C})$、$SP_2(\mathbb{C})$、$SO_2(\mathbb{C})$ 和 $O_2(\mathbb{C})$ 的 Schur 代数，以及 $r=2$ 时的 Schur 代数 $S^X(n,2)$（对任意类型 X）。其中正交群 $O_2(\mathbb{C})$ 不是典型群，但是可以类似地用标准表示的张量积来定义其 Schur 代数。

一般的基域 K 上，通过分析对偶余代数我们计算了 $SO_2(K)$ 和 $O_2(K)$ 的 Schur 代数，比较了 $SO_3(K)$、$SP_2(K)$ 和 $SL_2(K)$ 的 Schur 代数。并通过计算证明了参数 $r=2$ 时关于正交群、辛群和 Brauer 代数之间的双中心性质，作为副产品还得到了 B、C、D 型 Schur 代数 $S^X(n,2)$ 的结构，以及相应典型群和相似群的分解数的一些信息。

1.3 论文的结构安排

本文的结构安排如下：

第 2章回顾典型李代数、典型群的正根和支配权，以及典型群及其相似群（作为代数群）的坐标环、有理表示和多项式表示的概念和基本性质。除了几个注之外，所有的结果均可见于相应的参考文献。

第 3、4、5章分别对应于 1.2节中三个部分的工作。第 3 章先回顾 Schur 代数的定义、Littelmann 的道路模型，然后计算权集 $\pi^X(n,r)$ 和 $\pi_0^X(n,r)$，并证明 Schur 代数与广义 Schur 代数的关系。

第 4章构造 Schur 代数的逆系统，并证明相应典型群的超代数包含在其逆极限中。

第 5章具体计算若干 Schur 代数，并证明参数 $r=2$ 时正交群和辛群的 Schur–Weyl 对偶。

第 6 章总结本文的主要结果，并指出进一步可以展开的工作。

需要声明的是：鉴于复数域 $\mathbb{C}$ 上结果的简洁和优美性，我们将单独表述此时的结论。因此在不同的章节中，基域有时为 $\mathbb{C}$，有时为特征不等于 2 的代数封闭域 K（此时包括复数域的情形），详见各章节标题附注。

第 2 章　准备知识

本章主要回顾典型李代数的正根和支配权，典型群及其相似群的坐标环、正根、支配权和它们作为代数群的有理表示，除了几个注之外，所有的结果均可见于相应的参考文献中。

2.1 典型李代数的正根和支配权（基域 $\mathbb{C}$）

本节旨在回顾复数域 $\mathbb{C}$ 上典型李代数的正根和支配权，可参见 Humphreys [49]，关于剖分的概念可参见 J. A. Green [2]。

一般线性李代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 是 n 阶全矩阵代数，它的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0$ 是由所有 n 阶对角矩阵组成的 n 维复线性空间。对于 $i = 1, 2, \ldots, n$，记 $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}_0^*$ 为 $\mathfrak{h}_0$ 上的线性函数，它把一个对角矩阵

$$X = Diag[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

映为 x_i。我们记 $\mathbb{N}$ 为正整数集合，记 $\mathbb{N}_0$ 为非负整数集合，对于 $m \in \mathbb{N}$ 和 $r \in \mathbb{N}_0$，记

$$\Lambda^+(m, r) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m) : \sum_{i=1}^{m} a_i = r,\ a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m,\ a_i \in \mathbb{N}_0\}$$

为 r 的最多分成 m 份的剖分的集合。我们将一个剖分 $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ 与一个线性函数 $a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_m\varepsilon_m$ 等同起来。

对于复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个典型李代数 $\mathfrak{g}$，记 n 为 $\mathfrak{g}$ 中矩阵（在标准形式下）的阶。则典型李代数 $\mathfrak{g}$ 是一般线性李代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 的李子代数，并且 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{h}_0$ 的线性子空间。对于典型李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个单根 α，记 $\check{\alpha}$ 为 $\mathfrak{h}$ 中满足 $\langle \alpha, \check{\alpha} \rangle = 2$ 的元素，称为 α 的余单根。一个线性函数 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 被称为是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个支配权，如果对所有的单根 α，配对 $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle$ 都是非负整数。记 $\Lambda^+(X_m)$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的支配权集，其中 X_m 为 $\mathfrak{g}$ 的类型（见下文）。

任意给定两个支配权 λ、$\mu \in \Lambda^+(X_m)$，定义 $\lambda \trianglerighteq \mu$ 当且仅当 $\lambda - \mu$ 可以表达成李代数正根的非负系数的线性组合。这样就定义了支配权上的一个偏序，通

常称为支配序。在如上定义的支配序下，支配权集 $\Lambda^+(X_m)$ 分成了几个子集的不交并，使得来自不同子集的支配权之间没有序关系，并且任给一个支配权，在同一个子集中总存在在支配序下比它更大的支配权。我们称这样的子集为 $\Lambda^+(X_m)$ 的连通分支。

类型为 A_m（$m \geqslant 1$）的典型李代数 $\mathfrak{g}$ 为特殊线性李代数

$$\mathfrak{sl}_{m+1}(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{C}) : tr(M) = 0\},$$

按照上面的记号该李代数中矩阵的阶为 $n = m + 1$。此时 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{h}_0$ 的满足

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)(\mathfrak{h}) = 0$$

的线性子空间。李代数$\mathfrak{sl}_{m+1}(\mathbb{C})$的单根有 m 个，为

$$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} :\ i = 1, 2, \ldots, m;$$

正根有 $\frac{m(m+1)}{2}$ 个，正根集为

$$\Phi^+(A_m) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j :\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\};$$

支配权集为

$$\Lambda^+(A_m) = \{a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_m\varepsilon_m :\ a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m,\ a_i \in \mathbb{N}_0\}$$

$$\simeq \bigcup_{r \geqslant 0} \Lambda^+(m, r),$$

其中的同构是因为我们将支配权$a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_m\varepsilon_m$ 与剖分$(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \Lambda^+(m, \sum_{i=1}^n a_i)$等同了起来。在支配序下 $\Lambda^+(A_m)$ 分成 n 个连通分支：$\bigcup_{k \geqslant 0} \Lambda^+(m, kn + i)$，$i = 0, 1, \ldots, m$。

对于正整数 $i = 1, 2, \ldots, n$，记 $i' = n + 1 - i$。当类型不为 A_m 时，典型李代数的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{h}_0$ 的满足条件

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)(\mathfrak{h}) = 0$$

和

$$(\varepsilon_i+\varepsilon_{i'})(\mathfrak{h})=0, \quad i=1,2,\ldots,n$$

的线性子空间。特殊正交李代数是

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}):M^{tr}J+JM=0\},$$

其中 J 是任意的 n 阶对称、可逆矩阵。我们将取 J 为所有 (i,i') 位置为 1（$i=1,2,\ldots,n$）并且其他位置为 0 的矩阵。

类型为 B_m（$m\geqslant 2$）的典型李代数是奇数阶的特殊正交李代数 $\mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})$，该李代数中矩阵的阶是 $n=2m+1$。此时典型李代数的单根为

$$\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}\,(i=1,\ldots,m-1), \quad \alpha_m=\varepsilon_m;$$

正根集为

$$\Phi^+(B_m)=\{\varepsilon_i\pm\varepsilon_j:1\leqslant i<j\leqslant m\}\cup\{\varepsilon_i:\ i=1,\ \ldots,\ m\};$$

支配权集为

$$\Lambda^+(B_m)=\{a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_m\varepsilon_m:\ a_i\in\frac{1}{2}\mathbb{N}_0,\ a_i-a_j\in\mathbb{N}_0,\ \forall i<j\}。$$

在支配序下 $\Lambda^+(B_m)$ 分解成两个连通分支：整数系数的支配权 $\bigcup_{r\geqslant 0}\Lambda^+(m,r)$ 和分数系数的支配权 $(1/2,1/2,\ldots,1/2)+\bigcup_{r\geqslant 0}\Lambda^+(m,r)$。

类型为 C_m（$m\geqslant 2$）的典型李代数是偶数阶辛李代数

$$\mathfrak{sp}_{2m}(\mathbb{C})=\{M\in\mathcal{M}_{2m}(\mathbb{C}):M^{tr}J'+J'M=0\},$$

其中 J' 是任意的 $2m$ 阶反对称、可逆矩阵，我们将取 J' 为在所有 (i,i') 位置取 1（$i=1,2,\ldots,m$），在所有 (i',i) 位置取 -1（$i=1,2,\ldots,m$），在其他位置取 0 的矩阵。此时李代数中矩阵的阶是 $n=2m$，所有的单根为

$$\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}\,(i=1,2,\ldots,m-1), \quad \alpha_m=2\varepsilon_m;$$

正根集为

$$\Phi^+(C_m)=\{\varepsilon_i\pm\varepsilon_j:\ 1\leqslant i<j\leqslant m\}\cup\{2\varepsilon_i:\ i=1,2,\ldots,m\};$$

支配权集为

$$\Lambda^+(C_m)=\{a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_m\varepsilon_m:\ a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_m,\ a_i\in\mathbb{N}_0\}$$

$$\simeq\bigcup_{r\geqslant 0}\Lambda^+(m,r)。$$

在支配序下 $\Lambda^+(C_m)$ 分解成两个连通分支：奇数次的支配权 $\bigcup_{r\geqslant 0,\text{奇数}}\Lambda^+(m,r)=\bigcup_{k\geqslant 0}\Lambda^+(m,2k+1)$ 和偶数次的支配权 $\bigcup_{r\geqslant 0,\text{偶数}}\Lambda^+(m,r)=\bigcup_{k\geqslant 0}\Lambda^+(m,2k)$。

类型为 D_m（$m\geqslant 4$）的典型李代数为偶数阶的特殊正交李代数 $\mathfrak{so}_{2m}(\mathbb{C})$。此时李代数中矩阵的阶是 $n=2m$，所有的单根为

$$\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}\,(i=1,2,\ldots,m-2),\quad \alpha_{m-1}=\varepsilon_{m-1}+\varepsilon_m,$$

$$\alpha_m=\varepsilon_{m-1}-\varepsilon_m;$$

正根集为

$$\Phi^+(D_m)=\{\varepsilon_i\pm\varepsilon_j:\ 1\leqslant i<j\leqslant m\};$$

支配权集为

$$\Lambda^+(D_m)=\{(a_1+\cdots+a_{m-2}+\frac{a_{m-1}}{2}+\frac{a_m}{2})\varepsilon_1+\cdots+(\frac{a_{m-1}}{2}+\frac{a_m}{2})\varepsilon_{m-1}$$

$$+(\frac{a_{m-1}}{2}-\frac{a_m}{2})\varepsilon_m:\ a_i\in\mathbb{N}_0\}。$$

我们定义

$$\Lambda^-(m,r)=\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1},-\lambda_m):\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1},\lambda_m)\in\Lambda^+(m,r)\},$$

$$\Lambda^\pm(m,r)=\Lambda^+(m,r)\cup\Lambda^-(m,r)。$$

则李代数$\mathfrak{so}_{2m}(\mathbb{C})$的整数系数的支配权为 $\bigcup_{r\geqslant 0}\Lambda^{\pm}(m,r)$。在支配序下 $\bigcup_{r\geqslant 0}\Lambda^{\pm}(m,r)$ 分成两个连通分支：奇数次的权 $\bigcup_{r\geqslant 0}\Lambda^{\pm}(m,2k+1)$ 和偶数次的权 $\bigcup_{k\geqslant 0}\Lambda^{\pm}(m,2k)$。

2.2 典型群及其相似群的坐标环、正根和支配权（基域 K）

本节中基域是特征不等于 2 的代数封闭域 K。有关余代数、余理想和双代数、双理想的概念可参见 Abe [50]，有关仿射代数簇、坐标函数和仿射坐标环的概念可参见 Hartshorne [51]，有关相似群（group of similitudes）的概念可参见 Doty [13]（注意其中关于相似群采用了不同的记号）。

对于一个固定的正整数 $n\geqslant 1$，全矩阵代数 $\mathcal{M}_n(K)$ 是域 K 上的一个 n^2 维的仿射代数簇。我们沿用文献 [2]中的记号，对$1\leqslant i,j\leqslant n$，记

$$c_{ij}:\mathcal{M}_n(K)\longrightarrow K$$

为把一个 $n\times n$ 矩阵映到它的 (i,j) 位置的坐标函数。代数簇 $\mathcal{M}_n(K)$ 的仿射坐标环是带 n^2 个变量的多项式代数 $K[c_{ij}]$，这是一个双代数，它的余乘和余单位由下式给出

$$\Delta(c_{ij})=\Sigma_{k=1}^{n}c_{ik}\otimes c_{kj},\quad \epsilon(c_{ij})=\delta_{ij},\quad \forall\, i,\ j=1,\ldots,n。$$

这个双代数自然的可由多项式的次数进行分次，每一个齐次部分 $K[c_{ij}]_r$（$r\geq 0$）包含所有的 r 次齐次多项式，并且是一个余子代数。我们称 $K[c_{ij}]$ 的一个理想 I 是齐次理想，如果它可以分解成齐次部分的直和，即

$$I=\bigoplus_{r\geqslant 0}(I\cap K[c_{ij}]_r)。$$

我们令

$$\det=\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}c_{i,\sigma(i)},$$

其中 Σ_n 为 n 阶对称群，这是一个 n 次齐次多项式，它把一个矩阵$M\in$

$\mathcal{M}_n(K)$映到其行列式$\det(M)$。对于 $i,j=1,2,\ldots,n$，令

$$c_1(i,j)=\sum_{k=1}^{n}c_{ki}c_{k'j},\quad c_2(i,j)=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}c_{jk'},$$

和

$$c_1'(i,j)=\sum_{k=1}^{n}\epsilon(k)c_{ki}c_{k'j},\quad c_2'(i,j)=\sum_{k=1}^{n}\epsilon(k)c_{ik}c_{jk'},$$

其中 $k'=n+1-k$，当 n 是奇数时 $\epsilon(k)=1$，当 n 是偶数并且 $1\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}$ 时 $\epsilon(k)=1$，当 n 是偶数并且 $\frac{n}{2}<k\leqslant n$ 时 $\epsilon(k)=-1$。这些都是 2 次齐次多项式。

类型为 A_m（$m\geqslant 1$）的典型群是特殊线性群

$$SL_{m+1}(K)=\{M\in\mathcal{M}_{m+1}(K):\det(M)=1\},$$

类型为 B_m（$m\geq 2$）的典型群是奇数阶的特殊正交群

$$SO_{2m+1}(K)=\{M\in\mathcal{M}_{2m+1}(K):\det(M)=1,\ M^{tr}JM=J=MJM^{tr}\},$$

类型为 C_m 的典型群是偶数阶的辛群

$$SP_{2m}(K)=\{M\in\mathcal{M}_{2m}(K):M^{tr}J'M=J'=MJ'M^{tr}\},$$

类型为 D_m 的典型群是偶数阶的特殊正交群

$$SO_{2m}(K)=\{M\in\mathcal{M}_{2m}(K):\det(M)=1,\ M^{tr}JM=J=MJM^{tr}\},$$

其中对称矩阵 J 和反对称矩阵 J' 均依照上节中的取法。按照上节的约定，我们记类型为 X_m 的典型群中矩阵的阶为 n。

注记 2.1: 事实上，在基域 K 的特征不等于 2 的前提下，特殊正交群（和辛群）不依赖于矩阵 J（和矩阵 J'）的选取。也就是说，不同的对称、可逆矩阵 J 定义出的特殊正交群是彼此同构的，不同的反对称、可逆矩阵 J' 定义出的辛群也是彼此同构的。整篇论文中，除了 5.3节之外，所有的矩阵 J 和 J' 都如上选

取。■

对于一个 n 阶矩阵 $M=(m_{ij})$，条件

$$M^{tr}JM = J = MJM^{tr}$$

等价于 $\forall\, i,j=1,2,\ldots,n$，

$$\delta_{j,i'} = c_{ij}(M^{tr}JM) = c_1(i,j)(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}m_{k'j}$$

$$\delta_{j,i'} = c_{ij}(MJM^{tr}) = c_2(i,j)(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}m_{jk'}$$

其中 $\delta_{i,j}$ 是通常的符号，即当 $i=j$ 时取值为 1，当 $i\neq j$ 时取值为 0。条件

$$M^{tr}J'M = J' = MJ'M^{tr}$$

等价于 $\forall\, i,j=1,2,\ldots,n$，

$$\delta_{j,i'} = c_{ij}(M^{tr}J'M) = c_1'(i,j)(M) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon(k)m_{ki}m_{k'j}$$

$$\delta_{j,i'} = c_{ij}(MJ'M^{tr}) = c_2'(i,j)(M) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon(k)m_{ik}m_{jk'}。$$

由定义知，典型群 G 是全矩阵代数 $\mathcal{M}_n(K)$ 的一个仿射子代数簇，故而其仿射坐标环 $K[G]$ 为多项式代数 $K[c_{ij}]$ 到 G 上的限制。换言之，记 $I(G)$ 为由 G 的定义关系生成的 $K[c_{ij}]$ 的理想，则 $K[G]$ 是 $K[c_{ij}]$ 模去 $I(G)$ 得到的商环。

类型 A_m 时，理想 $I(SL_n(K))$ 由 $\det-1$ 生成，类型为 B_m 和 D_m 时，理想 $I(SO_n(K))$ 由

$$\{\det-1\}\cup\{c_1(i,i')-1,\ c_2(i,i')-1 : 1\leqslant i\leqslant n\}$$

$$\cup\{c_1(i,j),\ c_2(i,j) : 1\leqslant j\neq i'\leqslant n\}$$

生成。类型为 C_m 时，理想 $I(SP_n(K))$ 由

$$\{c_1'(i,i')-1,\ c_2'(i,i')-1 : 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{c_1'(i,j),\ c_2'(i,j) : 1 \leqslant j \neq i' \leqslant n\}$$

生成。

注意到 $I(G)$ 实际上是双代数 $K[c_{ij}]$ 的双理想，故而 $K[G]$ 继承了 $K[c_{ij}]$ 的余乘 Δ 和余单位 ϵ 也成为双代数。但是 $I(G)$ 并非齐次理想，而

$$I(G)^0 \triangleq \bigoplus_{r \geqslant 0} (I(G) \cap K[c_{ij}]_r)$$

是齐次理想，并且对非负整数$r \geqslant 0$，齐次部分

$$I(G)_r^0 \triangleq I(G) \cap K[c_{ij}]_r$$

是余理想。所以商环 $K[c_{ij}]_r / I(G)_r^0$ 是一个余代数，记为 $K[G]_r^0$。

注记 2.2: 作为典型群 G 上的有理函数，$K[G]_{r_1}^0$ 和 $K[G]_{r_2}^0$（$r_1 \neq r_2$）中的多项式可能相等。比如，$K[G]_n^0$ 中的行列式多项式 det 等于 $K[G]_0^0$ 中的 1；在类型为 B_m 和 D_m 时，$K[SO_n(K)]_2^0$ 中的 2 次齐次多项式 $c_1(i,i')$ 和 $c_2(i,i')$ 都等于 1；在类型为 C_m 时，$K[SP_n(K)]_2^0$ 中的 2 次齐次多项式 $c_1'(i,i')$ 和 $c_2'(i,i')$ 都等于 1。■

我们记典型群 G 的相似群为 G^0。在类型为 A_m（$m \geqslant 1$）时，相似群为

$$SL_{m+1}^0(K) = \{M \in \mathcal{M}_{m+1}(K) :\ \det(M) \neq 0\} = GL_{m+1}(K)。$$

类型为 B_m（$m \geqslant 2$）时，相似群为

$$SO_{2m+1}^0(K) = \{M \in \mathcal{M}_{2m+1}(K) :\ M^{tr}JM = MJM^{tr} = sJ,$$

$$\det(M) = t,\ 0 \neq t、s \in K\}。$$

类型为 C_m（$m \geqslant 2$）时，相似群为

$$SP_{2m}^0(K) = \{M \in \mathcal{M}_{2m}(K) :\ M^{tr}J'M = MJ'M^{tr} = sJ',\ 0 \neq s \in K\}。$$

类型为 D_m（$m \geqslant 4$）时，相似群为

$$SO^0_{2m}(K) = \{M \in \mathcal{M}_{2m}(K):\ M^{tr}JM = MJM^{tr} = sJ,$$

$$\det(M) = t,\ t = s^m,\ 0 \neq t、s \in K\}。$$

其中对称矩阵J和反对称J'如相应典型群中定义。

对于一个矩阵 $M = (m_{ij})$，条件

$$M^{tr}JM = MJM^{tr} = sJ$$

等价于 $\forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n$，

$$s\delta_{j,i'} = c_{ij}(M^{tr}JM) = c_1(i,j)(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}m_{k'j},$$

$$s\delta_{j,i'} = c_{ij}(MJM^{tr}) = c_2(i,j)(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}m_{jk'}。$$

条件

$$M^{tr}J'M = MJ'M^{tr} = sJ'$$

等价于 $\forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n$，

$$s\delta_{j,i'} = c_{ij}(M^{tr}J'M) = c'_1(i,j)(M) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon(k)m_{ki}m_{k'j},$$

$$s\delta_{j,i'} = c_{ij}(MJ'M^{tr}) = c'_2(i,j)(M) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon(k)m_{ik}m_{jk'}。$$

作为相似群 G^0 上的 2 次齐次多项式，在类型 B_m 和 D_m 时，我们有 $c_1(i,i') = c_2(i,i')$（$\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$），记为 c_0；在类型 C_m 时，我们有 $c'_1(i,i') = c'_2(i,i')$（$\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$），也记为 c_0。

注记 2.3: 作为典型群 G 及其相似群 G^0 上的多项式，在类型为 B_m 时，$(\det)^2 = (c_0)^n$；在类型为 C_m 和 D_m 时，$\det = (c_0)^m$。 ■

我们记$K[G^0]$为相似群G^0的仿射坐标环，记 $K\langle G^0\rangle$ 为 $K[G^0]$ 的由 $\{c_{ij}: \forall\, i,j\}$ 生成的子代数，这是 $K[c_{ij}]$ 模去理想

$$I\langle G^0\rangle = \{c \in K[c_{ij}] : c(g)=0,\ \forall g \in G^0\}$$

得到的商环。这里理想 $I\langle G^0\rangle$ 是一个齐次理想，即 $I\langle G^0\rangle = \bigoplus_{r\geqslant 0} I\langle G^0\rangle_r$，其中 $I\langle G^0\rangle_r = I(G^0)\bigcap K[c_{ij}]_r$ 是 $K[c_{ij}]$ 的余理想。所以

$$K\langle G^0\rangle = \bigoplus_{r\geqslant 0} K[c_{ij}]_r/I\langle G^0\rangle_r$$

是一个分次代数，并且每个其次分量 $K\langle G^0\rangle_r$ 都是余代数。

事实上在类型为 A_m 时，理想 $I\langle GL_{m+1}(K)\rangle = 0$。在类型为 B_m 时，理想 $I\langle SO^0_{2m+1}(K)\rangle$ 由

$$\{c_1(i,i') - c_1(1,n),\ c_2(i,i') - c_1(1,n) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

$$\cup\{c_1(i,j),\ c_2(i,j) : 1 \leqslant j \neq i' \leqslant n\}$$

生成。在类型为 C_m 时，理想 $I\langle SP^0_{2m}(K)\rangle$ 由

$$\{c'_1(i,i') - c'_1(1,n),\ c'_2(i,i') - c'_1(1,n) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

$$\cup\{c'_1(i,j),\ c'_2(i,j) : 1 \leqslant j \neq i' \leqslant n\}$$

生成。在类型为 D_m 时，理想 $I\langle SO^0_{2m}(K)\rangle$ 由

$$\{\det - c_1(i,i')^m,\ c_2(i,i') - c_1(1,n) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

$$\cup\{c_1(i,j),\ c_2(i,j) : 1 \leqslant j \neq i' \leqslant n\}$$

生成。

下面的引理可由 $K[c_{ij}]$ 的理想 $I(G)^0_r$ 和 $I\langle G^0\rangle_r$ 的定义直接得到。

引理 2.1: （Doty [13]）对任意非负整数 $r \geqslant 0$，多项式代数 $K[c_{ij}]$ 的两个理想

$I(G)^0_r$ 和 $I\langle G^0\rangle_r$ 相等，从而余代数 $K[G]^0_r$ 和 $K\langle G^0\rangle_r$ 相等。

本节的最后，我们列出典型群及其相似群的正根集和支配权集，它们不依赖于基域 K 的选取，通过考虑相应李代数的信息计算可得。

我们记 $\Phi^+(X_m)$ 和 $\Lambda^+(X_m)$ 分别为类型为 X_m 的典型群的正根集和支配权集，它们等于相应李代数的正根集和支配权集，已经在前一节中给出。注意到类型为 B_m 和 D_m 时，支配权的系数可能为分数，但是由于我们后面的计算只涉及到整数系数的支配权，所以从现在起我们将仅考虑 $\Lambda^+(X_m)$ 的包含整数系数支配权的子集 $\Lambda^+(X_m)_{int}$。类似地，我们记 $\Phi^+_0(X_m)$ 和 $\Lambda^+_0(X_m)$ 分别为类型为 X_m 相似群的正根集和支配权集，记 $\Lambda^+_0(X_m)_{int}$ 为包含整数系数的支配权构成的子集。在类型为 A_m 和 C_m 时，所有的支配权都是整数系数的，此时我们有

$$\Lambda^+(X_m)_{int} = \Lambda^+(X_m),\quad \Lambda^+_0(X_m)_{int} = \Lambda^+_0(X_m)。$$

我们保留前一节中对 ε_i 的定义。令

$$\lambda_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n,\quad \varepsilon_0 = \varepsilon_i + \varepsilon_{i'},$$

其中 $i' = n+1-i$ 如前定义。这样在 C_m 和 D_m 型时，$n = 2m$ 是偶数，并且

$$\lambda_0 = m\varepsilon_0,\quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_n = \cdots = \varepsilon_m + \varepsilon_{m+1}。$$

在 B_m 型时，$n = 2m+1$ 是奇数，并且

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_n = \cdots = \varepsilon_m + \varepsilon_{m+2} = 2\varepsilon_{m+1},\quad 2\lambda_0 = n\varepsilon_0。$$

类型为 A_m（$m \geqslant 1$）型时，$n = m+1$，

$$\Phi^+(A_m) = \Phi^+_0(A_m) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j : 1 \leqslant i < j \leqslant n\},$$

$$\Lambda^+(A_m) = \{a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_m\varepsilon_m : a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m,\ a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0\},$$

$$\Lambda^+_0(A_m) = \{a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n : a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n,\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_m\varepsilon_m + a_0\lambda_0 : a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_m,\ a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0,\ a_0 \in \mathbb{Z}\}。$$

类型为 B_m（$m \geqslant 2$）型时，

$$\Phi^+(B_m) = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : 1 \leqslant i < j \leqslant m;\ \varepsilon_i : 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

$$\Phi_0^+(B_m) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ \varepsilon_i + \varepsilon_j - \varepsilon_0 : 1 \leqslant i < j \leqslant m;\ \varepsilon_i - \varepsilon_{m+1} : 1 \leqslant i \leqslant m\}。$$

$$\Lambda^+(B_m)_{int} = \{a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_m\varepsilon_m : a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m,\ a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0\},$$

$$\Lambda_0^+(B_m)_{int} = \{a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_m\varepsilon_m + a_0\varepsilon_{m+1} : a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m,\ a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0,\ a_0 \in \mathbb{Z}\}。$$

类型为 C_m（$m \geqslant 2$）型时，

$$\Phi^+(C_m) = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : 1 \leqslant i < j \leqslant m;\ 2\varepsilon_i : 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

$$\Phi_0^+(C_m) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ \varepsilon_i + \varepsilon_j - \varepsilon_0 : 1 \leqslant i < j \leqslant m;\ \varepsilon_i - \varepsilon_{i'} : 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

$$\Lambda^+(C_m) = \{a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_m\varepsilon_m : a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m,\ a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0\},$$

$$\Lambda_0^+(C_m) = \{a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_m\varepsilon_m + a_0\varepsilon_0 : a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m,\ a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0,\ a_0 \in \mathbb{Z}\}。$$

类型为 D_m（$m \geqslant 4$）型时，

$$\Phi^+(D_m) = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : 1 \leqslant i < j \leqslant m\},$$

$$\Phi_0^+(D_m) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ \varepsilon_i + \varepsilon_j - \varepsilon_0 : 1 \leqslant i < j \leqslant m\},$$

$$\Lambda^+(D_m)_{int} = \{a_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + a_m\varepsilon_m : a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_{m-1} \geqslant |a_m|,\ a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}\},$$

$$\Lambda_0^+(D_m)_{int} = \{a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_m\varepsilon_m + a_0\varepsilon_0 : a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{m-1} \geqslant |a_m|,\ a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}\}。$$

注意到这里 a_m 上的绝对值符号表明 $a_1, \ldots, a_{m-1}$ 都是非负整数。

2.3 典型群及其相似群的有理表示（基域 K）

本节中的内容主要参见 [13, 2]，其中有关代数群的概念可参见 [52, 53]。这里所有出现的表示、模和右余模都是有限维的，基域 K 是特征不为 2 的代数封闭

域。

设 H 为任一群，单位元为 1_H。记 K^H 为由所有从 H 到 K 的函数构成的 K-线性空间，其加法和数乘均点点定义，即对任意$f, f' \in K^H$，$\lambda \in K$和$h \in H$，

$$(f \cdot f')(h) = f(h) \cdot f'(h), \quad (\lambda \cdot f)(h) = \lambda \cdot f(h)。$$

从 H 上的群结构出发可以得到两个 K-线性映射

$$\Delta : K^H \longrightarrow K^{H\times H}, \quad \Delta(f)(g,h) = f(g \cdot h)$$

$$\epsilon : K^H \longrightarrow K, \quad \epsilon(f) = f(1_H)$$

其中 $f \in K^H$，$g, h \in H$。记群 H 在域 K 上的群代数为 KH，这是一个以 H 中元素为基的 K-代数，其乘法由群 H 中元素的乘法线性扩充得到。

给定一个 K-线性空间 V，如果存在群同态

$$\rho : H \longrightarrow GL_K(V),$$

则称 V 是群 H 的一个线性表示，如果存在 K-代数同态

$$\rho' : KH \longrightarrow \mathrm{End}_K(V),$$

则称 V 是一个 KH-模，并且称 ρ 和 ρ' 为相应的表示映射。注意到 H 上的函数 $f \in K^H$ 可以自然的线性延拓到群代数 KH 上，成为 KH 上的线性函数，因而 H 在 K 上的线性表示可以自然的与 KH-模等同起来。

设 V 是一个 KH-模，取定 V 的一组 K-基 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，则存在函数 $r_{ij} \in K^H$（$1 \leqslant i, j \leqslant n$）满足

$$h \cdot v_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}(h) v_i, \quad \forall\, h \in H。$$

按照 J. A. Green [2, pp. 6]的说法，我们称这些函数 r_{ij}（$1 \leqslant i, j \leqslant n$）为系数函数，

并且定义 V 的系数空间为 K^H 的由系数函数

$$\{r_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots, n\}$$

生成的线性子空间，记为 $cf(V)$。再记 $F(K^H)$ 为由所有 KH-模的系数空间生成的 K^H 的线性子空间，则 $F(K^H)$ 是一个余代数，其余乘和余单位分别由 K^H 上的映射 Δ 和 ϵ 限制到 $F(K^H)$ 上得到。

引理 2.2: （J. A. Green [2]）设 V 是一个 KH- 模，v_i 和 r_{ij} 如上定义。则 V 的系数空间 $cf(V)$ 是 $F(K^H)$ 的余子代数，其余乘 Δ 和余单位 ϵ 由下式给出

$$\Delta(r_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} r_{ik} \otimes r_{kj}, \quad \epsilon(r_{ij}) = \delta_{ij}, \quad \forall\, i, j。$$

证明: 对任意 $h, h' \in H$，根据系数函数的定义有

$$(h \cdot h') \cdot (v_j) = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}(h \cdot h')v_i,$$

根据表示映射的定义有

$$\begin{aligned}
(h \cdot h') \cdot (v_j) &= h \cdot (h' \cdot v_j) = h \cdot (\sum_{k=1}^{n} r_{kj}(h')v_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} r_{kj}(h')(h \cdot v_j) = \sum_{k=1}^{n} r_{kj}(h') \sum_{i=1}^{n} r_{ik}(h)v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} r_{ik}(h)r_{kj}(h')v_i。
\end{aligned}$$

由此可得 $r_{ij}(h \cdot h') = \sum_{k=1}^{n} r_{ik}(h)r_{kj}(h')$，即 $\Delta(r_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} r_{ik} \otimes r_{kj}$。

类似地，对于群 H 的单位元 1_H，有

$$v_j = 1_H \cdot (v_j) = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}(1_H)v_i。$$

由此可得 $\epsilon(r_{ij}) = r_{ij}(1_H) = \delta_{ij}$。 ■

下面的观察见于文献 [54]中的引理1.2。

引理 2.3: 设 H 和 V 如上所述，则作为一个 K-代数，表示映射 $\rho : KH \longrightarrow \text{End}_K(V)$ 的像同构于系数空间 $cf(V)$ 的线性对偶 $cf(V)^* = \text{Hom}_K(cf(V), K)$。

证明: 根据系数空间 $cf(V)$ 的定义，有

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\rho) &= \{\alpha \in KH : \rho(\alpha) = 0\} \\ &= \{\alpha \in KH : c(\alpha) = 0, \quad \forall\, c \in cf(V)\} \\ &= \{\alpha \in KH : r_{ij}(\alpha) = 0, \quad \forall\, i, j\}。\end{aligned}$$

因为 $\text{Im}(\rho) \cong KH/\text{Ker}(\rho)$，所以系数函数 r_{ij} 在 $\text{Im}(\rho)$ 上是良定的，并且系数空间 $cf(V)$ 是 $\text{Im}(\rho)$ 的线性对偶 $\text{Im}(\rho)^*$ 的子空间。另外注意到对任意 $\beta \in \text{Im}(\rho)$，总存在某个系数函数 c 使得 $c(\beta) \neq 0$。由此我们得到了有限维 K-线性空间的同构 $cf(V) \to \text{Im}(\rho)^*$。通过取对偶我们得到 K-线性空间的同构 $\text{Im}(\rho) \to cf(V)^*$。

因为系数空间 $cf(V)$ 上的余代数结构是由群代数 KH 上的代数结构诱导的，所以从 $\text{Im}(\rho)$ 到 $cf(V)^*$ 的线性同构实际上保持二者的代数结构。 ■

当群 H 是域 K 上的代数群时，其坐标环 $K[H]$ 是余代数 $F(K^H)$ 的余子代数。这时称 H 的一个线性表示 V 是有理表示，如果 V 的系数空间 $cf(V)$ 被包含在坐标环 $K[H]$ 中，即 $cf(V)$ 是 $K[H]$ 的余子代数。根据文献 [2, pp. 9]，代数群 H 的每一个有理表示都可以与 $K[H]$ 的右余模等同起来。类似地我们可以证明如下的引理。

引理 2.4: 设 A 是域 K 上的一个有限维结合代数，那么 A 的线性对偶空间 $A^* = \text{Hom}_K(A, K)$ 自然的是一个余代数。记 $mod(A)$ 为有限维 A-模构成的范畴，记 $comod(A^*)$ 为有限维右 A^*-余模构成的范畴。则 $mod(A)$ 和 $comod(A^*)$ 之间存在范畴等价。

证明: 对偶空间 A^* 上的余乘 $\Delta : A^* \longrightarrow A^* \otimes A^*$ 和 余单位 $\epsilon : A^* \longrightarrow K$ 分别由代数 A 的乘法和单位元 1_A 诱导，即对任意 $f \in A^*$ 和 $a, a' \in A$，

$$\Delta(f)(a, a') = f(a \cdot a'), \qquad \epsilon(f) = f(1_A)。$$

设 V 是一个 A-模，以 $\{v_i\}_{i=1}^n$ 为基，以 $\{r_{ij}\}_{i,j=1}^n$ 为系数函数，即有

$$a \cdot v_j = \sum_{i=1}^n r_{ij}(a) v_i, \quad \forall\, a \in A。$$

则映射 $v_j \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \otimes r_{ij}$ 给出了 V 上的右 A^*-余模结构。反之，设 U 是一个右 A^*-余模，以 $\{u_i\}_{i=1}^n$ 为基，并且右余模结构由下式给出

$$u_j \mapsto \sum_{i=1}^n u_i \otimes r_{ij}, \quad r_{ij} \in A^*。$$

则

$$a \cdot u_j = \sum_{i=1}^n r_{ij}(a) u_i, \quad \forall\, a \in A$$

给出了 U 上的 A-模结构。最后可以验证对于两个 A-模 V 和 W，它们作为 A-模和作为右 A^*-余模的态射空间是同构的，即 $\mathrm{Hom}_A(V,W) \cong \mathrm{Hom}_{A^*}(V,W)$。■

对于一个典型群 G 或者其相似群 G^0（二者均是域 K 上代数群），一个有理表示 V 被称为是一个多项式表示，如果 V 上的系数函数都是坐标函数 c_{ij} 的多项式。换言之，V 的系数空间 $cf(V)$ 被包含于该典型群 G 的坐标环 $K[G]$，或者 $K\langle G^0\rangle$（对应于其相似群 G^0）。显然，典型群的所有有理表示均是多项式表示。设 $r \geqslant 0$ 为非负整数，相似群 G^0 的一个多项式表示 V 被称为是 r 次齐次多项式表示，如果 V 的系数空间 $cf(V)$ 被包含在齐次空间 $K\langle G^0\rangle_r$ 中。前面我们已经指出过，典型群 G 上的不同次数的多项式可能相等，所以 G 上的多项式表示无法谈及齐次与否。

我们记 $M^X(n)$ 为相似群 G^0 上的有理表示构成的范畴，其中 X 为群 G^0 的类型，n 为群 G^0 中矩阵的阶；记 $M^X(n,r)$ 为由 G^0 上 r 次齐次多项式构成的 $M^X(n,r)$ 的满子范畴，其中 $r \in \mathbb{N}_0$。根据前面的分析，存在范畴等价

$$M^X(n) \;\cong\; comod(K\langle G^0\rangle)$$

和

$$M^X(n,r) \;\cong\; comod(K\langle G^0\rangle_r)。$$

引理 2.5: 相似群 G^0 上的多项式表示范畴 $M^X(n)$ 存在直和分解

$$M^X(n) \cong \bigoplus_{r\geqslant 0} M^X(n,r),$$

即 G^0 上的任一多项式表示都可以表达成齐次多项式表示的直和，并且 G^0 上不同次数的齐次多项式表示之间没有非平凡的映射或者扩张。

证明: 根据 $K\langle G^0\rangle$ 的定义有余子代数的直和分解

$$K\langle G^0\rangle = \bigoplus_{r\geqslant 0} K\langle G^0\rangle_r,$$

根据文献 [55]中的结论(1.6c)可知，相似群 G^0 上的任一多项式表示都可以表达成齐次多项式表示的直和。特别的，我们知道 G^0 上不可分解的多项式表示一定是齐次的。

注意到 G^0 上一个齐次多项式表示的子表示依然是齐次多项式表示，并且次数相同，从而一个齐次多项式表示的商表示也是同一次数的齐次多项式表示。设 f 是从 r 次齐次多项式表示 V 到 s 次齐次多项式表示 W 的一个非零 G^0 同态。由于 f 的像 $\mathrm{Im}(f)$ 既是 V 的商表示，又是 W 的子表示，所以 $\mathrm{Im}(f)$ 既是 r 次齐次多项式表示，又是 s 次齐次多项式表示，特别地 $r=s$。这就证明了不同次数的齐次多项式之间没有非平凡的映射。

现在假设 $Ext^1(V,W)\neq 0$，其中 V 是 r 次齐次多项式表示，W 是 s 次齐次多项式表示。这样就有形如

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} V \longrightarrow 0$$

的非分裂的短正合序列。因此一定存在 Y 的非零的不可分解直和项，记为 Y_1，满足 $\mathrm{Im}(f)\bigcap Y_1\neq 0$ 和 $g(Y_1)\neq 0$。从而 Y_1 是一个齐次多项式表示。根据上一段的论述，$\mathrm{Im}(f)\bigcap Y_1$ 因为是 $\mathrm{Im}(f)$ 的子表示所以是 s 次齐次多项式表示，而 $g(Y_1)$ 因为是 V 的子表示所以是 r 次齐次多项式表示。但是它们又都与 Y_1 的次数相等，所以 $r=s$。现在因为 Y 的每一个不可分解直和项或者与 $\mathrm{Im}(f)$ 的交集非空，或者在映射 g 下的像集非空，因此该不可分解直和项一定是 r 次齐次的。由此可知 Y 是 r 次齐次的多项式表示。综上所述我们证明了不同次数的齐

次多项式表示之间没有非平凡的扩张。 ■

引理 2.6: 设 V 是相似群 G^0 上的一个齐次多项式表示。则限制到典型群 G 上 V 是一个多项式表示，并且表示映射

$$\rho_0 : KG^0 \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$$

的像等于表示映射

$$\rho : KG \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$$

的像，其中 ρ 是 ρ_0 到群代数 KG 上的限制。

证明: 易见 $K\langle G^0\rangle$ 中的元素到 G 上的限制落在坐标环 $K[G]$ 中，因此 G^0 上的多项式表示限制到 G 上依然是多项式表示。由于群代数 KG 是群代数 KG^0 的子代数，故而映射 ρ 的像集 $\mathrm{Im}(\rho)$ 是映射 ρ_0 的像集 $\mathrm{Im}(\rho_0)$ 的子代数。

另一方面，任给 G^0 中的矩阵 g^0，记 $d\,(\neq 0)$ 为其行列式。因为基域 K 是代数封闭的，所以存在 $\lambda \in K$ 使得 $\lambda^n = d$，其中 n 是群 G 和 G^0 中矩阵的阶。我们令 $g = \lambda^{-1}g^0$，则因为 $\det(g) = 1$ 所以 g 属于典型群 G。设 V 是 G^0 上的 r 次齐次多项式表示，则对于 $K[c_{ij}]_r$ 中的齐次多项式 f，我们有 $f(g^0) = \lambda^r f(g)$。因此

$$\rho_0(g^0) = \rho_0(\lambda \cdot g) = \lambda^r \rho_0(g) = \lambda^r \rho(g) \in \mathrm{Im}(\rho)。$$

这样 $\rho_0(G^0)$ 以及 $\mathrm{Im}(\rho_0) = \rho_0(KG^0)$都被包含在 $\mathrm{Im}(\rho)$ 中。综上所述，我们已经证明了 $\mathrm{Im}(\rho_0)$ 和 $\mathrm{Im}(\rho)$ 作为代数相等。 ■

引理 2.7: 任给 G^0 上的 r 次齐次多项式表示 V 和 V'，我们有 $\mathrm{Hom}_{KG^0}(V, V') \cong \mathrm{Hom}_{KG}(V, V')$，并且 V 和 V' 作为 G^0 上的表示同构当且仅当二者限制到 G 上同构。从而范畴 $M^X(n, r)$ 成为 G 上有理表示范畴的满子范畴。

证明: 因为 KG 是 KG^0 的子代数，所以态射空间 $\mathrm{Hom}_{KG^0}(V, V')$ 是 $\mathrm{Hom}_{KG}(V, V')$ 的子空间。另一方面，任给 KG-态射 $f : V \longrightarrow V'$。对任意 $g^0 \in G^0$，由引理 2.6的证明过程知存在 $\lambda \in K$ 使得 $\lambda^{-1}g^0 \in G$，故 $\forall\, v \in V$，

$$f(g^0 \cdot v) = f(\lambda(\lambda^{-1}g^0) \cdot v) = \lambda(\lambda^{-1}g^0)f(v) = g^0 \cdot f(v)。$$

因此 f 也是一个 KG^0-态射，从而 $\mathrm{Hom}_{KG^0}(V, V') \cong \mathrm{Hom}_{KG}(V, V')$。引理的第二个断言亦由此可得。 ■

第 3 章　典型群的 Schur 代数的代数结构

在简要回顾典型群的 Schur 代数的定义（3.1节）和 Littelmann 的道路模型（3.2节）之后，3.3节将确定复数域上 Schur 代数的结构（见推论 3.4），并且通过利用道路模型进行张量积分解而计算 Schur 代数的权集 $\pi^X(n,r)$（见定理 3.1）。3.4节将描述当基域为特征不等于 2 的代数封闭域时，Schur 代数在相应典型群及其相似群上的权集，并判定其何时是饱和的。3.5节将证明 A、C和 D 型的 Schur 代数是 Donkin 定义下的广义 Schur 代数，而 B 型不是（见定理 3.2）。

沿用前一章的记号，X_m 代表典型群及其相似群的类型，即 A_m（$m \geqslant 1$），B_m（$m \geqslant 2$），C_m（$m \geqslant 2$）和 D_m（$m \geqslant 4$）。记 G 为类型为 X_m 的典型群，记 G^0 为相应的相似群；记 n 为它们中矩阵的阶，即类型为 A_m 时 $n=m+1$，类型为 B_m 时 $n=2m+1$，类型为 C_m 和 D_m 时 $n=2m$。

3.1 典型群的 Schur 代数的定义（基域 K）

本节中只有命题 3.1是新的，其余部分均见于 [13]。设 E 为 X_m 型的典型群 G 和相似群 G^0 的标准表示，也就是说 E 是域 K 上的 n-维列向量空间，群 G 和 G^0 通过矩阵左乘自然的作用在 E 上。对任意正整数 $r \geqslant 1$，记 $E^{\otimes r}$ 为 E 的 r 阶张量积空间，群 G 和 G^0 在 $E^{\otimes r}$ 上有自然的对角作用。

定义 3.1: （Doty [13]）对任意的正整数 $r \geqslant 1$，定义类型为 X_m 的 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 是表示映射

$$\rho^r : KG \longrightarrow \mathrm{End}_K(E^{\otimes r})$$

的像集，或者是表示映射

$$\rho_0^r : KG^0 \longrightarrow \mathrm{End}_K(E^{\otimes r})$$

的像集。当 $r=0$ 时，约定 $S^X(n,0)=K$。

根据定义，$E^{\otimes r}$ 作为典型群 G 和相似群 G^0 上的表示，其系数空间分别为余代数 $K[c_{ij}]_r$ 到 G 和 G^0 上的限制，即分别为余代数 $K[G]_r^0$ 和 $K\langle G^0\rangle_r$（见

2.2节中的定义）。因此 $E^{\otimes r}$ 是典型群 G 上的多项式表示，是相似群 G^0 上的 r 次齐次多项式表示。由引理 2.6，上述 Schur 代数定义中表示映射 ρ^r 的像集等于表示映射 ρ_0^r 的像集，故 Schur 代数是良定的。

尽管从一开始我们就要求整数 m 在 B_m 和 C_m 型时满足 $m \geqslant 2$，在 D_m 型时满足 $m \geqslant 4$，实际上仅就 Schur 代数的定义来讲是无需如此的。对于更小的正整数 m，相应的典型李代数和典型群依然可以分别视为一般线性李代数和一般线性群的子对象，因此相应的 Schur 代数可以类似地定义，我们将在第 5章中讨论 $m=1$ 的情形。

下面的结论赋予了 Schur 代数以余代数实现的方式，可直接由引理 2.1和引理 2.3得到。在第 4章中我们将通过这种余代数实现的途径，将 Schur 代数纳入逆系统中。

推论 3.1: 对任意非负整数 $r \geqslant 0$，类型为 X_m 的 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 同构于余代数 $K[G]_r^0$ 和 $K\langle G^0\rangle_r$ 的线性对偶。

特别的，类型为 A_m 时，余代数$K\langle GL_n(K)\rangle_r = K[c_{ij}]_r$，因此 $S^A(n,r) \cong (K[c_{ij}]_r)^*$，这与 J. A. Green [2]定义的 Schur 代数 $S_K(n,r)$一致。

根据引理 2.4和推论 3.1可知， Schur 代数的模范畴 $mod(S^X(n,r))$ 等价于余代数 $K\langle G^0\rangle_r$ 的余模范畴 $comod(K\langle G^0\rangle_r)$，而且余模范畴 $comod(K\langle G^0\rangle_r)$ 等价于 G^0 上的 r 次齐次多项式表示范畴 $M^X(n,r)$。事实上，因为 $S^X(n,r)$ 是相似群的群代数 KG^0 的商，所以任何 $S^X(n,r)$-模自然都是 G^0 的表示。

推论 3.2: 对任意非负整数 $r \geqslant 0$，范畴 $mod(S^X(n,r))$ 和 $M^X(n,r)$ 等价。

我们称一个表示是忠实的，如果其表示映射是单射。称一个表示 U 是另一个表示 V 的子商，如果 U 同构于 V 的某个子表示的商。因为G^0 的表示 $E^{\otimes r}$ 在范畴 $M^X(n,r)$ 中，根据引理 2.5可知，$E^{\otimes r}$ 的所有子商都落在 $M^X(n,r)$ 中。

命题 3.1: 相似群 G^0 上的任何 r 次齐次多项式表示都是某个表示 $(E^{\otimes r})^{\oplus l}$ 的子商，其中 $l \in \mathbb{N}$。

证明: 根据定义 3.1，$E^{\otimes r}$ 是 Schur 代数的 $S^X(n,r)$ 上的忠实模，因此 $S^X(n,r)$ 作为自己的左正则模是 $E^{\otimes r}$ 的有限次直和的子模，从而 $S^X(n,r)$ 上所有的射影模都是 $E^{\otimes r}$ 的有限次直和的子模。任给相似群 G^0 上的一个 r 次齐次多项式表

示 V，它同时是一个 $S^X(n,r)$-模。这样 V 的射影闭包是表示 $(E^{\otimes r})^{\oplus l}$ 的子模，其中 $l \in \mathbb{N}$ 是某个正整数。而又因为 V 自然是它的射影闭包的商，所以它是 $(E^{\otimes r})^{\oplus l}$ 的子商。 ■

3.2 Littelmann 的道路模型（基域 $\mathbb{C}$）

本节中旨在回顾 Littelmann 的道路模型（path model），参见 [48]，其中讨论的对象是更广泛的可对称化的 Kac-Moody 李代数，而我们这里仅限于有限维的复半单李代数。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维的复半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是其 Cartan 子代数。我们记 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 为 $\mathfrak{h}^*$ 的由所有单根的实数系数线性组合构成的子空间，这是一个实向量空间，并且 $\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^*$，$\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$。考虑分段线性并且满足条件 $\gamma(0) = 0$ 的映射 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$，这样的映射上存在一个通过参数化定义的等价关系，即两个这样的映射 γ 和 γ' 等价，记作 $\gamma \sim \gamma'$，当且仅当 γ'可以由 γ 通过重新参数化而得到。我们沿用文献 [48]的说法，称这样的映射的等价类为道路，记 Π 为所有道路的集合。两条道路 γ_1 和 γ_2 的乘积 $\gamma * \gamma'$ 由下式定义

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{如果 } 0 \leqslant t \leqslant 1/2; \\ \gamma_2(2t-1) + \gamma_1(1) & \text{如果 } 1/2 \leqslant t \leqslant 1\text{ 。} \end{cases}$$

对于李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个单根 α，我们令 s_α 表示 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 上由

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \check{\alpha}, \quad \lambda \rangle \alpha, \ \forall\, \lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$$

给出的线性函数。对 $\gamma \in \Pi$，记 $s_\alpha(\gamma)$ 为由 $s_\alpha(\gamma)(t) = s_\alpha(\gamma(t))$ 定义的道路。

给定一条道路 γ 和李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个单根 α，来定义道路 $\gamma \in \Pi$ 上的反射 f_α。考虑映射 $h_\alpha\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$，它把 $t \in [0,1]$ 映到 $\langle \check{\alpha}, \gamma(t) \rangle$。我们令

$$Q = min\{\mathrm{Im}(h_\alpha) \cap \mathbb{Z}\},$$

不难看出 Q 或者是一个负整数或者是零。令

$$p = max\{t \in [0,1]:\ h_\alpha(t) = Q\},$$

令 P 为实数 $h_\alpha(1) - Q$ 的整数部分，再令 $x > p$ 满足

$$h_\alpha(x) = Q + 1 \quad \text{和} \quad Q < h_\alpha(t) < Q + 1,\quad \forall\, p < t < x。$$

按如下的方式定义道路 γ_1、γ_2 和 γ_3

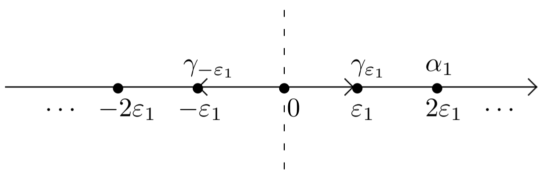
$$\gamma_1(t) = \gamma(tp),\quad \gamma_2(t) = \gamma(p + t(x - p)) - \gamma(p),$$

$$\gamma_3(t) = \gamma(x + t(1 - x)) - \gamma(x),$$

则我们有 $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$。定义反射 f_α如下：如果 $P = 0$ 则 $f_\alpha(\gamma) = 0$，如果 $P > 0$ 则 $f_\alpha(\gamma) = \gamma_1 * s_\alpha(\gamma_2) * \gamma_3$。

对任意线性函数 $\mu \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$，我们记 γ_μ 为把 $t \in [0,1]$ 映到 $t\mu$ 的映射所决定的道路。下面来看几个在形如 γ_μ 的道路上做反射的例子。

例 3.1: 类型为 A_1 时，$\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ 是一维实向量空间，如下图示。

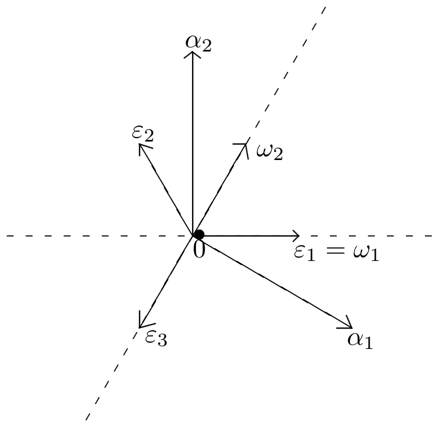


此时李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 有唯一的一个单根 $\alpha_1 = 2\varepsilon_1$，我们考虑道路 γ_{ε_1}。由定义，函数 h_{α_1} 把 $t \in [0,1]$ 映到 $\langle \check{\alpha}_1, \gamma_{\varepsilon_1}(t)\rangle = \langle \check{\alpha}_1, t\varepsilon_1\rangle = t$。因此有 $Q = 0$，$P = 1$，$p = 0$，$x = 1$，并且

$$f_{\alpha_1}(\gamma_{\varepsilon_1}) = s_{\alpha_1}(\gamma_{\varepsilon_1}) = \gamma_{\varepsilon_1 - \alpha_1} = \gamma_{-\varepsilon_1}。$$

■

例 3.2: 类型为 A_2 时，$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 是一个二维实向量空间，如下图所示，其中 $\omega_1 = \varepsilon_1$，$\omega_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 为基本权（fundamental weights）。

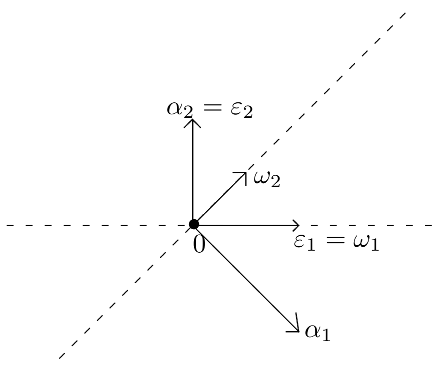


对于道路 γ_{ε_1} 和李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ 的单根 $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$，函数 h_{α_1} 把 $t \in [0,1]$ 映到 t。通过与例 3.1类似的计算，可以得到

$$f_{\alpha_1}(\gamma_{\varepsilon_1}) = s_{\alpha_1}(\gamma_{\varepsilon_1}) = \gamma_{\varepsilon_1 - \alpha_1} = \gamma_{\varepsilon_2}。$$

对于单根 $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$，函数 h_{α_2} 把 $t \in [0,1]$ 映到 0。因此 $Q = 0 = P$，并且 $f_{\alpha_2}(\gamma_{\varepsilon_1}) = 0$。 ■

例 3.3: 类型为 B_2 时，$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 是一个二维实向量空间，如下图示，其中 $\omega_1 = \varepsilon_1$，$\omega_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ 为基本权。



对于道路 γ_{ε_1} 和李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$ 的单根 $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$，函数 h_{α_1} 把 $t \in [0,1]$ 映到 t 并且

$$f_{\alpha_1}(\gamma_{\varepsilon_1}) = s_{\alpha_1}(\gamma_{\varepsilon_1}) = \gamma_{\varepsilon_1 - \alpha_1} = \gamma_{\varepsilon_2}。$$

对于单根 $\alpha_2=\varepsilon_2$ 和道路 γ_{ε_2}，函数 h_{α_2} 把 $t\in[0,1]$ 映到 $2t$。因此有 $Q=0$，$P=2$，$p=0$，$x=1/2$ 和 $\gamma_{\varepsilon_2}=\gamma_2*\gamma_3$。进而有

$$f_{\alpha_2}(\gamma_{\varepsilon_2})=s_{\alpha_2}(\gamma_2)*\gamma_3=\tilde{\gamma}_0$$

其中 $\tilde{\gamma}_0$ 代表由

$$\tilde{\gamma}_0(t)=\begin{cases}-t\varepsilon_2 & \text{如果}0\leqslant t\leqslant 1/2\\ (t-1)\varepsilon_2 & \text{如果}1/2\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

定义的映射决定的道路。进而我们可以验证

$$f_{\alpha_2}(\tilde{\gamma}_0(t))=f_{\alpha_2}^2(\gamma_{\varepsilon_2})=\gamma_{-\varepsilon_2}。$$

■

给定李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个支配权 μ，令

$$\mathcal{P}_\mu=\{f_{\alpha_{i_1}}\cdots f_{\alpha_{i_s}}(\gamma_\mu):\ \alpha_{i_j}\text{ 是单根},\ s\in\mathbf{N}_0\}。$$

集合 $\mathcal{P}_\mu$ 的元素被称为型为 μ 的Lakshmibai-Seshadri道路，简记为 LS-道路。任意给定两个支配权 λ 和 μ，我们称一个型为 μ 的 LS-道路 γ 是 λ-支配的，当且仅当对任意的 $t\in[0,1]$，$\lambda+\gamma(t)$ 都在基本 Weyl 房中。记 $\mathcal{P}_\mu^\lambda$ 为所有的型为 μ 的 λ-支配的LS-道路的全体。在这些记号下，我们有下面的分解定理。

命题 3.2: （Littelmann [48]）任意给定李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个支配权 λ 和 μ，我们有如下张量积的分解公式

$$V(\lambda)\otimes V(\mu)\ =\ \bigoplus_{\nu\in\mathcal{P}_\mu^\lambda}V(\lambda+\nu(1)),$$

其中 $V(\lambda)$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的最高权为 λ 的既约表示。

值得注意的是，上面分解式右端直和项的重数被隐藏在道路中了，因为 $\mathcal{P}_\mu^\lambda$ 中不同的道路可能在 $t=1$ 时取值相等。

3.3 典型群的Schur 代数的代数结构（基域 $\mathbb{C}$）

本节的基域为复数域 $\mathbb{C}$，我们将证明 Schur 代数是半单的（见推论 3.4），并且将利用 3.2节中介绍的道路模型来确定 Schur 代数的结构（见定理 3.1）。

我们记 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathbb{C}$ 上类型为 X_m 的典型李代数，G 为 $\mathbb{C}$ 上类型为 X_m 的典型群，则 $\mathfrak{g}$ 是一般线性李代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 的李子代数，G 是一般线性群 $GL_n(\mathbb{C})$ 的李子群。此时群 G 的标准表示是 n-维复向量空间 $\mathbb{C}^n$，表示映射为 $\rho : \mathbb{C}G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$。对任意正整数 $r \in \mathbb{N}$，群代数 $\mathbb{C}G$ 对角作用在张量积空间 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 上。同时李代数 $\mathfrak{g}$ 也通过矩阵左乘作用在向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上，并且通过

$$X(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_r) = \sum_{i=1}^{r} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes Xv_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_r$$

作用在张量积空间 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 上，其中 $X \in \mathfrak{g}$，$v_i \in \mathbb{C}^n$（$i = 1, 2, \ldots, r$）。记 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数，这是一个复数域上的结合代数。我们知道李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示可以自然地等同于包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 上的模。

根据定义，对正整数 $r \geqslant 1$，Schur 代数 $S^X(n, r)$ 是表示映射

$$\rho^r : \mathbb{C}G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^n)^{\otimes r})$$

的像集，同时也是表示映射

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^n)^{\otimes r})$$

的像集。这一李代数的实现方式使得我们可以自由地利用李理论的知识来研究 Schur 代数。当整数 $n = 0$ 时，根据约定 $S^X(n, 0) = \mathbb{C}$。

引理 3.1: 设 V_1 和 V_2 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个有限维既约表示。那么 $V_1 \oplus V_2$ 也是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个表示，记其表示映射为

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1 \oplus V_2)。$$

当 V_1 不同构于 V_2 时该表示映射的像集等于 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_2)$，当 V_1 同构于

V_2 时该表示映射的像集同构于 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1)$。

证明: 对 $i=1,2$，记 $\rho_i : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 为 V_i 的表示映射。因为 V_i 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的既约表示，所以 V_i 是其表示映射 ρ_i 的像集 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ker}(\rho_i)$ 上的既约表示。注意到 $\mathrm{Im}(\rho_i)$ 仅有一个忠实的既约表示 V_i，所以它是一个单代数，并且表示映射 ρ_i 是满射。

根据直和的定义，表示映射

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1 \oplus V_2)$$

经过 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_2)$ 分解。如果 V_1 同构于 V_2，我们可以将表示映射 ρ_1 和 ρ_2 等同起来，因此

$$\mathrm{Im}(\rho_1 \oplus \rho_2) \cong \mathrm{Im}(\rho_1) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1)。$$

如果 V_1 不同构于 V_2，则因为表示映射 ρ_1 和 ρ_2 都是满射，故

$$\mathrm{Im}(\rho_1 \oplus \rho_2) = \mathrm{Im}(\rho_1) \oplus \mathrm{Im}(\rho_2) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_2)。$$

■

推论 3.3: 设 V_i（$i=1,2,\ldots,s$）是李代数 $\mathfrak{g}$ 的两两互不同构的有限维既约表示。则对任意正整数 $n_i \in \mathbb{N}$（$i=1,2,\ldots,s$），表示映射

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\bigoplus_{i=1}^{s}(V_i^{\oplus n_i}))$$

的像集是 $\bigoplus_{i=1}^{s} End_{\mathbb{C}}(V_i)$。

我们的李代数 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维的单的复李代数，所以 $\mathfrak{g}$ 上所有的有限维表示都是完全可约的，并且每个不可约直和项都是以某个支配权 $\lambda \in \Lambda^+(X_m)$ 为最高权的高权表示 $V(\lambda)$，参见 [49]。特别地，张量积 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 也是李代数 $\mathfrak{g}$ 的完

全可约表示。假定我们有分解

$$(\mathbb{C}^n)^{\otimes r} = \bigoplus_{\lambda\in\pi^X(n,r)} V(\lambda)^{\oplus l_\lambda}$$

其中 l_λ 是既约表示 $V(\lambda)$ 的重数，$\pi^X(n,r)$ 是支配权集 $\Lambda^+(X_m)$ 的子集，包含了 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 中所有不可约直和项的最高权。根据推论 3.3，我们有

$$\begin{aligned} S^X(n,r) &= \mathrm{Im}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\bigoplus_{\lambda\in\pi^X(n,r)} V(\lambda)^{\oplus l_\lambda})) \\ &\cong \bigoplus_{\lambda\in\pi^X(n,r)} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V(\lambda))。\end{aligned}$$

推论 3.4: Schur 代数 $S^X(n,r)$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的半单代数，并且有分解

$$S^X(n,r) \cong \bigoplus_{\lambda\in\pi^X(n,r)} \mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C}),$$

其中 $d_\lambda = \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)$ 为既约表示 $V(\lambda)$ 的维数。

我们知道 Weyl 特征标公式给出了 d_λ 的计算公式（见 [49]）。现在为了描述 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 的代数结构，我们必须确定集合 $\pi^X(n,r)$，等价地说，我们要给出张量积 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 在李代数 $\mathfrak{g}$ 上的直和分解。注意到标准表示 $\mathbb{C}^n$ 是最高权为 ε_1 的既约表示，让我们首先来确定型为 ε_1 的所有LS-道路的集合 $\mathcal{P}_{\varepsilon_1}$（见3.2节中定义）。

引理 3.2: 类型为 A_m 时，$\mathcal{P}_{\varepsilon_1} = \{\gamma_{\varepsilon_1}, \gamma_{\varepsilon_2}, \ldots, \gamma_{\varepsilon_{m+1}}\}$。类型为 B_m 时，$\mathcal{P}_{\varepsilon_1} = \{\gamma_{\varepsilon_1}, \gamma_{\varepsilon_2}, \ldots, \gamma_{\varepsilon_m}, \tilde{\gamma}_0, \gamma_{-\varepsilon_m}, \ldots, \gamma_{-\varepsilon_1}\}$，其中 $\tilde{\gamma}_0$ 为由映射

$$\tilde{\gamma}_0(t) = \begin{cases} -t\varepsilon_m & \text{如果 } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ (t-1)\varepsilon_m & \text{如果 } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

所决定的道路。类型为 C_m 和 D_m 时，$\mathcal{P}_{\varepsilon_1} = \{\gamma_{\varepsilon_1}, \gamma_{\varepsilon_2}, \ldots, \gamma_{\varepsilon_m}, \gamma_{-\varepsilon_m}, \ldots, \gamma_{-\varepsilon_1}\}$。

证明: 我们将通过在道路上做反射的方法，逐条地证明该结论。

类型为 A_m 时：设 $i \in \{1,2,\ldots,m\}$，$j \in \{1,2,\ldots,m+1\}$。对于李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{m+1}(\mathbb{C})$ 的单根 $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$和道路 γ_{ε_j}，函数 $f_{\alpha_i}(\gamma_{\varepsilon_j})$ 非零当且仅当 $j = i$，并且此时函数 h_{α_i} 把 $t \in [0,1]$ 映到 t，因此有 $Q = 0$，$P = 1$，$p = 0$ 和 $s = 1$。由此可得

$$f_{\alpha_i}(\gamma_{\varepsilon_i}) = s_{\alpha_i}(\gamma_{\varepsilon_i}) = \gamma_{\varepsilon_{i+1}}$$

和

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\varepsilon_1} &= \{f_{\alpha_{i_1}}\cdots f_{\alpha_{i_s}}(\gamma_{\varepsilon_1}):\ \alpha_{i_j}\text{是单根},\ s \in \mathbf{N}_0\}\\ &= \{\gamma_{\varepsilon_1},\ \gamma_{\varepsilon_2},\ \ldots,\ \gamma_{\varepsilon_{m+1}}\}。\end{aligned}$$

类型为 B_m 时：设 $i \in \{1,2,\ldots,m-1\}$，$j \in \{1,2,\ldots,m\}$。对于李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})$ 的单根 $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$和道路 γ_{ε_j}，函数 $f_{\alpha_i}(\gamma_{\varepsilon_j})$ 非零当且仅当 $j = i$，并且此时类似于 A_m 的情形，我们有 $f_{\alpha_i}(\gamma_{\varepsilon_i}) = \gamma_{\varepsilon_{i+1}}$。对于单根 α_i和道路 $\gamma_{-\varepsilon_j}$，函数 $f_{\alpha_i}(\gamma_{-\varepsilon_j})$ 非零当且仅当 $j = i+1$，并且此时有$f_{\alpha_i}(\gamma_{-\varepsilon_{i+1}}) = \gamma_{-\varepsilon_i}$。当 $i = m$ 时，单根为 $\alpha_m = \varepsilon_m$，函数 $f_{\alpha_m}(\varepsilon_j)$非零 当且仅当 $j = m$，此时类似于前面的例 3.3中可得

$$f_{\alpha_m}(\gamma_{\varepsilon_m}) = \tilde{\gamma}_0, \quad f_{\alpha_m}(\tilde{\gamma}_0) = \gamma_{-\varepsilon_m}。$$

再由 $f_{\alpha_m}(\gamma_{-\varepsilon_m}) = 0$ 和 $i \in \{1,2,\ldots,m-1\}$ 时 $f_{\alpha_i}(\tilde{\gamma}_0) = 0$，可得结论。

类型为 C_m 和 D_m 时，设 $i,j \in \{1,2,\ldots,m\}$。函数 $f_{\alpha_i}(\pm\gamma_{\varepsilon_j})$ 非零当且仅当以下某种情形发生

$$f_{\alpha_i}(\gamma_{\varepsilon_i}) = \gamma_{\varepsilon_{i+1}}, \quad i = 1,\ldots,m-1,$$

$$f_{\alpha_i}(\gamma_{-\varepsilon_{i+1}}) = \gamma_{-\varepsilon_i}, \quad i = 1,\ldots,m-1,$$

$$f_{\alpha_m}(\gamma_{\varepsilon_m}) = \gamma_{-\varepsilon_m}。$$

由此可得型为 ε_1 的LS-道路。 ■

回顾集合

$$\Lambda^+(m,r)=\{(a_1,a_2,\ldots,a_m):\sum_{i=1}^{m}a_i=r,\ a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_m,\ a_i\in\mathbb{N}_0\}$$

为 r 的最多分成 m 份的剖分全体。对于非负整数 $0\leqslant i$，我们引入如下的记号：

$$\Lambda_i^+(m,r)=\{\lambda=(a_1,\ldots,a_m)\in\Lambda^+(m,r):\ a_1,\ldots,a_{m-i}\neq 0\},$$

它包含了 $\Lambda^+(m,r)$ 中的那些前 $m-i$ 个位置非零，后 i 个位置随意的剖分。特别地，当 $i\geqslant m$ 时我们有 $\Lambda_i^+(m,r)=\Lambda^+(m,r)$。在前面 2.1节中，我们已经对 D 型的李代数定义了如下的记号：

$$\Lambda^-(m,r)=\{\lambda=(a_1,\ldots,a_{m-1},-a_m):\ (a_1,\ldots,a_{m-1},a_m)\in\Lambda^+(m,r)\},$$

$$\Lambda^\pm(m,r)=\Lambda^+(m,r)\cup\Lambda^-(m,r)。$$

我们约定当 $r<0$ 时，集合 $\Lambda^+(m,r)$，$\Lambda^\pm(m,r)$，$\Lambda^-(m,r)$ 和 $\Lambda_i^+(m,r)$ 都是空集。像 2.1节中那样，我们把一个剖分 $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m)$ 与支配权 $a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_m\varepsilon_m$ 等同起来。下面的定理完全确定了复数域上 Schur 代数的支配权的集合 $\pi^X(n,r)$。

定理 3.1: 对任意 $r\geqslant 0$，描述了复数域上典型群的 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 的权集为

$$\pi^A(n,r)=\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda^+(m,r-ni),$$

$$\pi^B(n,r)=\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda^+(m,r-2i)\cup\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda_i^+(m,r-(2i+1)),$$

$$\pi^C(n,r)=\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda^+(m,r-2i),$$

$$\pi^D(n,r)=\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda^\pm(m,r-2i),$$

其中 $\pi^B(n,r)$ 右端的第二项涉及到 Λ_i^+，$\pi^D(n,r)$ 的右端涉及到 $\Lambda^\pm$。

证明: 我们将对正整数 r 做归纳。当 $r=1$ 时，对任意类型 X_m，向量空间 $\mathbb{C}^n=V(\varepsilon_1)$ 是相应李代数的最高权为 ε_1 的既约表示。因此通过将支配权与剖分等同起来，我们有

$$\pi^X(n,1)=\{\varepsilon_1\}=\{(1,0,\dots,0)\}=\Lambda^+(m,1)。$$

一般地，假设集合 $\pi^X(n,r)$ 如定理所述，即我们有张量积空间的分解

$$(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}=V(\varepsilon_1)^{\otimes r}=\bigoplus_{\lambda\in\pi^X(n,r)}V(\lambda)^{\oplus l_\lambda},$$

其中 l_λ 是既约表示 $V(\lambda)$ 在 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 中的重数。则由命题 3.2得

$$\begin{aligned}(\mathbb{C}^n)^{\otimes r+1} &= \bigoplus_{\lambda\in\pi^X(n,r)}(V(\lambda)\otimes V(\varepsilon_1))^{\oplus l_\lambda}\\ &= \bigoplus_{\lambda\in\pi^X(n,r)}\bigoplus_{\gamma\in\mathcal{P}^\lambda_{\varepsilon_1}}V(\lambda+\gamma(1))^{\oplus l'_\lambda}\end{aligned}$$

其中 l'_λ 是既约表示 $V(\lambda+\gamma(1))$ 在 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r+1}$ 中的重数。故而根据定义有

$$\pi^X(n,r+1)=\{\lambda+\gamma(1):\lambda\in\pi^X(n,r),\ \gamma\in\mathcal{P}^\lambda_{\varepsilon_1}\},$$

其中

$$\mathcal{P}^\lambda_{\varepsilon_1}=\{\gamma\in\mathcal{P}_{\varepsilon_1}:\ \gamma(t)+\lambda\in\Lambda^+(X_m),\ \forall\,0\leqslant t\leqslant 1\}。$$

因此

$$\pi^X(n,r+1)=\Lambda^+(X_m)\cap\{\lambda+\gamma(1):\lambda\in\pi^X(n,r),\ \gamma\in\mathcal{P}_{\varepsilon_1}\}。$$

接下来我们逐一类型地证明该集合有着定理中表述的形式。

类型为 A_m 时，$n=m+1$，并且 $\varepsilon_n=-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_m)$。由归纳假设 $\pi^A(n,r)=\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda^+(m,r-ni)$。对任意的道路 $\gamma_{\varepsilon_j}\in\mathcal{P}_{\varepsilon_1}$（$j=1,2,\dots,n$），有

$\gamma_{\varepsilon_j}(1)=\varepsilon_j$ 成立。因此由引理 3.2，

$$\pi^A(n,r+1)=\Lambda^+(A_m)\cap\{\lambda+\varepsilon_j:\lambda\in\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda^+(m,r-ni),\ j=1,2,\ldots,n\}$$

是集合 $\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda^+(m,r+1-ni)$ 的子集。另一方面，对非负整数 $i\geqslant 0$，

$$P_{++}(A_m)\cap\{\lambda+\varepsilon_j:\lambda\in\Lambda^+(m,r-ni),\ j=1,2,\ldots,m\}=\Lambda^+(m,r+1-ni),$$

$$P_{++}(A_m)\cap\{\lambda+\varepsilon_n:\lambda\in\Lambda^+(m,r-ni)\}=\Lambda^+(m,r+1-n(i-1))。$$

我们已经证明了 $\pi^A(n,r+1)=\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda^+(m,r-ni)$。

类型为 B_m 时，$n=2m+1$。由归纳假设，

$$\pi^B(n,r)=\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda^+(m,r-2i)\cup\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda_i^+(m,r-(2i+1))。$$

如果 $\lambda\in\Lambda^+(m,r-2i)$，则 $\Lambda^+(B_m)\bigcap\{\lambda+\gamma(1):\ \gamma\in\mathcal{P}_{\varepsilon_1}^{\lambda}\}$ 是集合

$$\Lambda^+(m,r+1-2i)\cup\Lambda^+(m,r+1-2(i-1))\cup\Lambda_0^+(m,r-2i)$$

的子集。如果 $\lambda\in\Lambda_i^+(m,r-(2i+1))$，则 $\Lambda^+(B_m)\bigcap\{\lambda+\gamma(1):\ \gamma\in\mathcal{P}_{\varepsilon_1}^{\lambda}\}$ 是

$$\Lambda_{i+1}^+(m,r+1-(2(i+1)+1))\cup\Lambda_i^+(m,r+1-(2i+1))$$

的子集。所以权集 $\pi^B(n,r+1)$ 中的元素都有着定理想要的形式。反过来的包含关系是因为集合 $\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda^+(m,r+1-2i)$ 中的权都来自 $\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda^+(m,r-2i)$，而集合 $\Lambda_i^+(m,r+1-(2i+1)$ 中的权都来自 $\Lambda_i^+(m,r-(2i+1))\bigcup\Lambda_{i-1}^+(m,r-(2i-1))$。

类型为 C_m 时，$n=2m$。由归纳假设 $\pi^C(n,r)=\bigcup_{i\geqslant 0}\Lambda^+(m,r-2i)$。注意到对于非负整数 $i\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}P_{++}(C_m)\cap\{\lambda+\varepsilon_j:\lambda\in\Lambda^+(m,r-2i),\ j=1,2,\ldots,m\} &= \Lambda^+(m,r+1-2i),\\ P_{++}(C_m)\cap\{\lambda-\varepsilon_j:\lambda\in\Lambda^+(m,r-2i),\ j=1,2,\ldots,m\} &= \Lambda^+(m,r-1-2i)\end{aligned}$$

$$= \Lambda^+(m, r+1-2(i-1))。$$

因此由引理 3.2，权集 $\pi^C(n, r+1)$ 有着我们想要的形式。

类型为 D_m 时，$n = 2m$。由归纳假设 $\pi^D(n, r) = \bigcup_{i \geqslant 0} \Lambda^{\pm}(m, r-2i)$。根据引理 3.2，Schur 代数 $S^D(n, r+1)$ 的权集为

$$\pi^D(n, r+1) = P_{++}(D_m) \cap \{\lambda \pm \varepsilon_j : \lambda \in \Lambda^{\pm}(m, r-2i),\ j = 1, 2, \ldots, m\},$$

并且是集合 $\bigcup_{i \geqslant 0} \Lambda^{\pm}(m, r+1-2i)$ 的子集。反之，集合 $\bigcup_{i \geqslant 0} \Lambda^+(m, r+1-2i)$ 中的权都来自 $\bigcup_{\imath \geqslant 0} \Lambda^{\pm}(m, r+1-2i)$，而集合 $\Lambda^-(m, r+1-2i)$ 中的权都来自 $\Lambda^-(m, r-2i)$。所以权集 $\pi^D(n, r+1)$ 恰是定理中描述的形式。定理证毕。 ■

需要说明的是，定理 3.1中的权集在 Weyl 的书中有描述 [1]（也见文章 [41]的附件），我们的工作大大简化了其中的计算。

3.4 典型群的Schur 代数的支配权集（基域 K）

本节中基域为特征不等于 2 的代数封闭域 K。回顾 3.1节中，E 是类型为 X_m 的典型群 G 和相似群 G^0 的标准表示，对正整数 $r \geqslant 1$，群 G 和 G^0 对角作用在张量积空间 $E^{\otimes r}$ 上面。注意到 E 是一个单 Weyl 模，根据文献 [52]，代数群的 Weyl 模的张量积有一个以 Weyl 模为截面的滤。我们记 $\pi^X(n, r)$ 和 $\pi_0^X(n, r)$ 分别为 $E^{\otimes r}$ 在典型群 G 及其相似群 G^0 上的截面 Weyl 模的最高权的集合。

因为代数群 G 和 G^0 上的 Weyl 模都是以某一个支配权为最高权的高权表示，故集合 $\pi^X(n, r)$ 和 $\pi_0^X(n, r)$ 分别是典型群 G 及其相似群 G^0 的支配权集的子集。根据 Weyl 模的整性，这两个集合不依赖于基域 K 的选取。当基域 $K = \mathbb{C}$ 为复数域时，Weyl 模即单模，且 $E^{\otimes r} = (\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 在典型群 G 及其相似群 G^0 上都是完全可约的，因此集合 $\pi^X(n, r)$ 和 $\pi_0^X(n, r)$ 分别是 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 在 G 和 G^0 上的单直和项的最高权的集合。通过利用道路模型以给出 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 的直和分解，我们已经在 3.3节中决定了 $\pi^X(n, r)$。本节将给出集合 $\pi_0^X(n, r)$。

我们将用到在 2.2节中定义过的记号 λ_0 和 ε_0。回顾 $\lambda_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$，和 $\varepsilon_0 = \varepsilon_i + \varepsilon_{i'}$，其中 $i' = n + 1 - i$。这样在 C_m 和 D_m 型时，$n = 2m$ 是偶数，并且 $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_n = \cdots = \varepsilon_m + \varepsilon_{m+1}$，$\lambda_0 = m\varepsilon_0$。在 B_m 型时，$n = 2m + 1$ 是奇数，并且 $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_n = \cdots = \varepsilon_m + \varepsilon_{m+2} = 2\varepsilon_{m+1}$，$2\lambda_0 = n\varepsilon_0$。有关典型群 G

及其相似群 G^0 的正根集 $\Phi^+(X_m)$ 和 $\Phi_0^+(X_m)$、支配权集 $\Lambda^+(X_m)$ 和 $\Lambda_0^+(X_m)$、整数系数的支配权集 $\Lambda^+(X_m)_{int}$ 和 $\Lambda_0^+(X_m)_{int}$也见 2.2节。

我们有如下观察：通过把 λ_0 映到零（同时在 B、C 和 D 型时把 ε_0 也映到零），我们得到一个从 $\Lambda_0^+(X_m)_{int}$ 到 $\Lambda^+(X_m)_{int}$ 的满射，以及两个分别从 $\Phi_0^+(X_m)$ 到 $\Phi^+(X_m)$ 和从 $\pi_0^X(n,r)$ 到 $\pi^X(n,r)$ 的双射，记后者为

$$\theta : \pi_0^X(n,r) \twoheadrightarrow \pi^X(n,r)。$$

我们定义一个支配权 $\lambda = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_m\varepsilon_m$ 的次数为 $deg(\lambda) = a_1 + \cdots + a_m$。例如，上面定义的支配权 λ_0 和 ε_0 的次数分别为 $deg(\lambda_0) = n$，$deg(\varepsilon_0) = 2$。则权集 $\pi_0^X(n,r)$ 等于 $\Lambda_0^+(X_m)_{int}$ 与集合

$$\{\lambda + a_0\lambda_0 : \lambda \in \pi^X(n,r),\ a_0 \in \mathbb{Q}_0,\ deg(\lambda) + na_0 = r\}$$

的交集，其中 $\mathbb{Q}_0$ 是非负有理数的集合。

推论 3.5: 类型为 X_m 的相似群 G^0 上 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 的权集 $\pi_0^X(n,r)$ 为：

$$\begin{aligned}
\pi_0^A(n,r) &= \{\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i : a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n,\ a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{N}_0,\ \sum_{i=1}^n a_i = r\},\\
\pi_0^B(n,r) &= \bigcup_{i\geqslant 0}\{\sum_{i=1}^m a_i\varepsilon_i + (2i)\varepsilon_{m+1} : (a_1,\ldots,a_m) \in \Lambda^+(m, r-2i)\} \cup\\
&\quad \bigcup_{i\geqslant 0}\{\sum_{i=1}^m a_i\varepsilon_i + (2i+1)\varepsilon_{m+1} : (a_1,\ldots,a_m) \in \Lambda_i^+(m, r-(2i+1))\},\\
\pi_0^C(n,r) &= \{\sum_{i=1}^m a_i\varepsilon_i + a_0\varepsilon_0 : a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m,\ \sum_{i=1}^m a_i + 2a_0 = r,\\
&\quad a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0\},\\
\pi_0^D(n,r) &= \{\sum_{i=1}^m a_i\varepsilon_i + a_0\varepsilon_0 : a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_{m-1} \geqslant |a_m|,\ \sum_{i=1}^m a_i + 2a_0 = r,\\
&\quad a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{N}_0,\ a_m \in \mathbb{Z}\}。
\end{aligned}$$

因为基域 K 的特征不等于 2，所以余代数 $K[G]_r^0$ 和 $K\langle G^0\rangle_r$ 都有整基，即

这两个余代数可以定义在在整数集 $\mathbb{Z}$ 上，并且其 $\mathbb{Z}$-基通过与 K 做张量可以得到余代数在域 K 上的基。根据推论 3.1，Schur 代数 $S^X(n,r)$ 是这两个余代数的线性对偶，所以 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 也有整基。特别的， Schur 代数 $S^X(n,r)$ 的维数不依赖于基域 K 的选取。

对于典型群 G 或者其相似群 G^0 的一个支配权 λ，我们记 d_λ 为相应的最高权为 λ 的 Weyl 模 $W(\lambda)$ 的维数，则 d_λ 不依赖于基域的选取。当 $K=\mathbb{C}$ 为复数域时，Weyl 模 $W(\lambda)$ 实际上是以 λ 为最高权的不可约模。比较集合 $\pi^X(n,r)$ 和 $\pi_0^X(n,r)$，不难发现对任意 $\lambda\in\pi^X(n,r)$，$\theta^{-1}(\lambda)$ 是集合 $\pi_0^X(n,r)$ 中唯一的满足 $\theta^{-1}(\lambda)-\lambda\in\mathbb{Q}_0\lambda_0$ 的支配权，并且相似群 G^0 上的 Weyl 模 $W(\theta^{-1}(\lambda))$ 限制到典型群 G 上恰是 G 的 Weyl 模 $W(\lambda)$。特别的，$W(\theta^{-1}(\lambda))$ 和 $W(\lambda)$ 的维数相等，即 $d_{\theta^{-1}(\lambda)}=d_\lambda$。由推论 3.4可得如下结论。

推论 3.6: 类型为 X_m 的 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 在基域 K 上的维数是 $\sum_{\lambda\in\pi^X(n,r)}d_\lambda^2$，也等于 $\sum_{\mu\in\pi_0^X(n,r)}d_\mu^2$。

回顾在 2.1节中对于支配权定义的支配序：设 λ、μ 是典型群 G（相似群 G^0）上的支配权，我们称 λ 在支配序下大于 μ，记作 $\lambda\trianglerighteq\mu$，当且仅当二者的差 $\lambda-\mu$ 是群 G（群 G^0）的正根的非负系数的线性组合；同时也称 μ 在支配序下小于 λ，记作 $\mu\trianglelefteq\lambda$。给定集合 $\pi^X(n,r)$ 中的两个支配权 λ 和 μ，不难发现在支配序下，

$$\lambda\trianglerighteq\mu \quad \text{当且仅当} \quad \theta^{-1}(\lambda)\trianglerighteq\theta^{-1}(\mu)。$$

我们称支配权集 $\Lambda^+(X_m)$ 或者 $\Lambda_0^+(X_m)$ 的子集 π 是饱和的，如果对任意 $\lambda\in\pi$，所有在支配序下比 λ 小的支配权都在集合 π 中。例如，整数系数的支配权集 $\Lambda^+(X_m)_{int}$ 和 $\Lambda_0^+(X_m)_{int}$ 分别是支配权集 $\Lambda^+(X_m)$ 和 $\Lambda_0^+(X_m)$ 中的饱和子集。我们有如下关于集合 $\pi^X(n,r)$ 和 $\pi_0^X(n,r)$ 是否为支配权集中的饱和子集的判别法则。

引理 3.3: 对于正整数 $r\geqslant1$，以下三条等价：

（1）集合 $\pi^X(n,r)$ 是支配权集 $\Lambda^+(X_m)$ 中的饱和子集；

（2）集合 $\pi_0^X(n,r)$ 是支配权集 $\Lambda_0^+(X_m)$ 中的饱和子集；

（3）类型为 A_m（$m\geqslant1$）、C_m（$m\geqslant2$）或者 D_m（$m\geqslant4$）。

证明: 上面已经说明了（1）和（2）的等价性，下面我们来验证（1）和（3）的等价性。因为这里的条件都不依赖于基域的选取，我们将考虑复数域 $\mathbb{C}$ 的情形，同时视 $\Lambda^+(X_m)$ 为典型李代数 $\mathfrak{g}$ 的支配权集。

类型为 A_m（$m \geqslant 1$）时：典型李代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 的所有正根形如 $\varepsilon_i - \varepsilon_j$，其中 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，它们的次数或者等于 0 或者等于 $n = m+1$。因此根据支配序的定义，在次数之差不等于 0 或者 n 的支配权之间不存在支配序关系。由此可得集合 $\pi^A(n,r) = \bigcup_{i \geqslant 0} \Lambda^+(m, r-ni)$ 是支配权集 $\Lambda^+(A_m)$ 的饱和子集。

类型为 C_m（$m \geqslant 2$）和 D_m（$m \geqslant 4$）时：典型李代数 $\mathfrak{sp}_{2m}(\mathbb{C})$ 和 $\mathfrak{so}_{2m}(\mathbb{C})$ 的正根的次数均等于 0 或者 2，因此在次数之差不等于 0 或者 2 的支配权之间不存在支配序关系。由此可得集合 $\pi^C(n,r)$ 和 $\pi^D(n,r)$ 分别在 $\Lambda^+(C_m)$ 和 $\Lambda^+(D_m)$ 中是饱和子集。

类型为 B_m（$m \geqslant 2$）时：典型李代数 $\mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})$ 的正根集为

$$\{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : 1 \leqslant i < j \leqslant m\} \cup \{\varepsilon_i : 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

因此支配权 $(r-1, 0, \ldots, 0)$ 在支配序下小于支配权 $(r, 0, \ldots, 0)$。但是由定理 3.1，$(r, 0, \ldots, 0)$ 属于 $\pi^B(n,r)$，而 $(r-1, 0, \ldots, 0) \notin \Lambda_0^+(m, r-1)$，因此也不属于 $\pi^B(n,r)$。这就说明了 $\pi^B(n,r)$ 不是 $\Lambda^+(B_m)$ 的饱和子集。 ■

例 3.4: 我们取类型为 $X_m = B_2$（此时 $n=5$）和正整数 $r=3$ 为例说明集合 $\pi^B(n,r)$ 和 $\pi_0^B(n,r)$ 不是饱和子集。根据定理 3.1和推论 3.3知：

$$\pi^B(5,3) = \{(30), (21), (11), (10)\} = \{3\varepsilon_1, 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1\},$$

$$\pi_0^B(5,3) = \{3\varepsilon_1, 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3\}。$$

对于典型群 $SO_5(K)$，$(20) = 2\varepsilon_1$ 是支配权并且在支配序下 $3\varepsilon_1 \trianglerighteq 2\varepsilon_1$（因为二者之差 ε_1 是一个正根）。但是 $(30) \in \pi^B(5,3)$，而 $(20) \notin \pi^B(5,3)$，所以 $\pi^B(5,3)$ 不是 $\Lambda^+(B_2)$ 的饱和子集。类似地对于相似群 $SO_5^0(K)$，在支配序下 $3\varepsilon_1 \trianglerighteq 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3$，但是 $3\varepsilon_1 \in \pi_0^B(5,3)$，而 $2\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \notin \pi_0^B(5,3)$，所以 $\pi_0^B(5,3)$ 不是 $\Lambda_0^+(B_2)$ 的饱和子集。 ■

3.5 典型群的 Schur 代数与广义 Schur 代数（基域 K）

本节首先介绍广义 Schur 代数的定义和基本性质（见 Donkin [26]），然后证明类型为 A_m（$m \geqslant 1$）、C_m（$m \geqslant 2$）和 D_m（$m \geqslant 4$）的 Schur 代数是相应典型群及其相似群的广义 Schur 代数，而类型为 B_m 的 Schur 代数不是。这里的基域是特征不等于 2 的代数封闭域 K。

设 H 是域 K 上的一个约化代数群，$K[H]$ 为其仿射坐标环，$\Lambda^+(H)$ 为其支配权集。坐标环 $K[H]$ 是一个余代数（2.3节），上面存在自然的 H-模结构，由

$$(g \cdot c)(h) = c(hg), \quad \forall\, g, h \in H, \quad \forall\, c \in K[H]$$

给出。换言之，若记 c 的余乘为 $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$，则 $g \cdot c = \sum c_2(g) c_1 \in K[H]$。设 π 是支配权集 $\Lambda^+(H)$ 中的一个元素个数有限的饱和子集（饱和子集的定义见3.4节）。给定群代数 KH 的一个有理表示 V（有理表示的定义见 2.3节），如果表示 V 的每一个单合成因子的最高权都在集合 π 中，则称 V 属于集合 π。定义由集合 π 决定的广义 Schur 代数 $S(\pi)$ 为余代数 $O_\pi(K[H])$ 的线性对偶，其中 $O_\pi(K[H])$ 为 $K[H]$ 的属于集合 π 的最大的 KH-子表示。

记 $rmod(KH)$ 为群代数 KH 的有理表示构成的范畴。对于群 H 的一个支配权 λ，像上节一样记 d_λ 为最高权为 λ 的 Weyl 模 $W(\lambda)$ 的维数。

命题 3.3: （Donkin [26]）设 π 是支配权集 $\Lambda^+(H)$ 的一个有限饱和子集，则以下结论成立：

（1）广义 Schur 代数 $S(\pi)$ 是一个有限维的 K-结合代数，其维数为 $\dim_K S(\pi) = \sum_{\lambda \in \pi} d_\lambda^2$；

（2）广义 Schur 代数 $S(\pi)$ 的模范畴 $mod(S(\pi))$ 是范畴 $rmod(KH)$ 的扩张封闭的满子范畴，包含所有属于 π 的 H-有理表示；

（3）当基域 $K = \mathbb{C}$ 为复数域时，广义 Schur 代数是半单代数，并且同构于 $\bigoplus_{\lambda \in \pi} \mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C})$。

接下来的引理可由 J. A. Green [55]中的（1.2e）和（1.2g）直接得到。

引理 3.4: 设 V 是代数群 H 的一个有理表示，同时也是一个 KH-模。则 V 的系数空间 $cf(V)$ 是坐标环 $K[H]$ 的 KH-子模；并且作为 KH-模，V 和 $cf(V)$ 有着相同的合成因子集。

当基域 $K = \mathbb{C}$ 为复数域时，由推论 3.4和命题 3.3（3）知对任意正整数 $r \geqslant 1$，类型为 X_m 的 Schur 代数 $S^X(n,r)$是相应典型群的广义 Schur 代数当且仅当集合 $\pi^X(n,r)$ 是支配权集 $\Lambda^+(X_m)$ 的饱和子集。而由引理 3.3，集合 $\pi^X(n,r)$ 是饱和的当且仅当 Schur 代数相应的类型为 A_m（$m \geqslant 1$）、C_m（$m \geqslant 2$）和 D_m（$m \geqslant 4$）。

事实上当基域为更一般的特征不等于 2 的代数封闭域时，该结论也是成立的。

定理 3.2: 对任意正整数 $r \geqslant 1$，在类型为 A_m（$m \geqslant 1$），C_m（$m \geqslant 2$）和 D_m（$m \geqslant 4$）时，典型群 G 的 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 同构于由集合 $\pi^X(n,r)$ 决定的 G 的广义 Schur 代数；同时，作为相似群 G^0 的 Schur 代数，$S^X(n,r)$ 同构于由集合 $\pi_0^X(n,r)$ 决定的群 G^0 的广义 Schur 代数。

证明: 我们任意固定一个正整数 $r \geqslant 1$ 和一个满足题意的类型 X_m。为了简化记号，在该证明过程中我们记 π 为 $\pi^X(n,r)$。我们将要证明：作为类型为 X_m 的典型群 G 的坐标环 $K[G]$ 的余子代数， $K[G]_r^0$ 和 $O_\pi(K[G])$ 相等。由此，它们的线性对偶 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 和广义 Schur 代数 $S(\pi)$ 作为 K-代数同构。在相似群 G^0 情形，证明是类似的，我们将其略去。

根据推论 3.6和命题 3.3，Schur 代数 $S^X(n,r)$ 和广义 Schur 代数 $S(\pi)$ 有着相等的 K-维数，因此余代数 $K[G]_r^0$ 和 $O_\pi(K[G])$ 也有着相等的 K-维数。这样为了证明两个余代数相等，我们只需证明 $K[G]_r^0$ 是 $O_\pi(K[G])$ 的余子代数。

按照定义，$O_\pi(K[G])$ 是坐标环 $K[G]$ 的属于集合 π 的最大的 KG-有理子表示。注意这里的最大是在包含意义下的最大，从而 $O_\pi(K[G])$ 是 $K[G]$ 的所有的属于集合 π 的 KG-有理子表示的和。由于集合 $\pi = \pi^X(n,r)$ 是饱和的，故它是 $E^{\otimes r}$ 在 G 上的单合成因子的最高权的集合。从而作为 KG 上的有理表示，$E^{\otimes r}$ 是属于 π 的。根据引理 3.4，$E^{\otimes r}$ 的系数空间 $K[G]_r^0$ 作为 KG 上的有理表示是属于集合 π 的，所以 $K[G]_r^0$ 被包含在 $O_\pi(K[G])$ 中。又因为二者的余代数结构都来自典型群 G 的坐标环 $K[G]$ 的余代数结构，所以上面得到的包含映射 $K[G]_r^0 \longrightarrow O_\pi(K[G])$ 保持二者的余代数结构。 ■

注记 3.1: 当整数 $r \geqslant 1$ 时，类型为 B_m（$m \geqslant 2$）的权集 $\pi^B(n,r)$ 和 $\pi_0^B(n,r)$ 不是饱和的（由引理 3.3）。通过比较 Schur 代数 $S^B(n,r)$ 与广义 Schur 代数的维数不难发现，B 型 Schur 代数不可能成为典型群 $SO_n(K)$ 或者相似群 $(SO_n(K))^0$ 上的广义 Schur 代数。

当整数 $r=0$ 时，对任意的类型 X_m，集合 $\pi^X(n,0)=\{0\}$ 始终是 $\Lambda^+(X_m)$ 的饱和子集，$\pi_0^X(n,0)=\{0\}$ 也始终是 $\Lambda_0^+(X_m)$ 的饱和子集，因此 Schur 代数 $S^X(n,0)=K$ 是典型群 G 的由 $\{0\}$ 决定的广义 Schur 代数，也是相似群 G^0 的由 $\{0\}$ 决定的广义 Schur 代数。 ■

需要指出的是，定理 3.2在类型为 A 时由 J. A. Green 给出 [2]，虽然 J. A. Green 没有广义 Schur 代数的概念，但是 Donkin 正是为了推广 A 型 Schur 代数而定义了广义 Schur 代数，从而 A 型的 Schur 代数自然是一般线性群（和特殊线性群）的广义 Schur 代数。在类型为 C 时由 Donkin 给出 [3, pp. 77]，我们这里用了完全不同的方法统一的给出了所有类型的证明。

我们称一个代数是不可分解的，如果它不能表达成两个真理想的直积。

推论 3.7: 在类型为 A_m（$m\geqslant 1$）、C_m（$m\geqslant 2$）和 D_m（$m\geqslant 4$）时，对任意有限饱和子集 $\pi\subset\Lambda^+(X_m)_{int}$，典型群 G 的由 π 决定的广义 Schur 代数 $S(\pi)$ 都是某个 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 的商，其中 $r\geqslant 0$ 为非负整数。

证明: 设 π_1 和 π_2 是整数系数的支配权集 $\Lambda^+(X_m)_{int}$ 的两个有限饱和子集，并且 $\pi_1\subseteq\pi_2$。则由定义 $O_{\pi_1}(K[G])$ 是 $O_{\pi_2}(K[G])$ 的余子代数，因此广义 Schur 代数 $S(\pi_1)$ 是广义 Schur 代数 $S(\pi_2)$ 的商。

注意到 $\Lambda^+(X_m)_{int}=\bigcup_{r\geqslant 0}\pi^X(n,r)$。在类型为 A 时，我们有 $\pi^X(n,r)\subseteq\pi^X(n,r+n)$，并且不同次数的支配权之间在支配序下没有序关系。在类型为 C 和 D 时，我们有 $\pi^X(n,r)\subseteq\pi^X(n,r+2)$，并且奇数次数的支配权与偶数次数的支配权之间在支配序下没有序关系。因此在类型为 A，C 和 D 时，整数系数的支配权集 $\Lambda^+(X_m)_{int}$ 的有限子集 π 若要使得相应的广义 Schur 代数 $S(\pi)$ 是不可分解代数，则集合 π 必须被包含在某个 $\pi^X(n,r)$ 中。从而根据上一段落的分析，广义 Schur 代数 $S(\pi)$ 是广义 Schur 代数 $S(\pi^X(n,r))$ 的商，而后者又同构于 Schur 代数 $S^X(n,r)$（由定理 3.2）。 ■

但是，上面的证明对于相似群 G^0 是不成立的。因为集合 $\Lambda_0^+(X_m)_{int}$ 中的支配权比 $\bigcup_{r\geqslant 0}\pi_0^X(n,r)$ 的要多，所以存在有限的饱和子集 $\pi\subseteq\Lambda_0^+(X_m)_{int}$ 不被包含于任一 $\pi^X(n,r)$ 中。

第 4 章　典型群的 Schur 代数与超代数

本章将通过 Schur 代数的余代数实现方式，把固定某一类型 X_m 的 Schur 代数 $S^X(n,r)$（$r \geqslant 0$）纳入逆系统（在 B、C、D 型时有两种相容的构造方法），并证明相应典型群的超代数（hyperalgebra）可以自然地作为子代数嵌入到其逆极限中（见定理 4.2）。特别地在复数域上，Schur 代数的逆极限可以显示的表达出来（4.1节）。最后 4.4节将讨论 Schur 代数的拟遗传性。

回顾一下我们的记号：X_m 代表典型李代数、典型群及其相似群的类型，即 A_m（$m \geqslant 1$），B_m（$m \geqslant 2$），C_m（$m \geqslant 2$）和 D_m（$m \geqslant 4$）；G 代表类型为 X_m 的典型群，G^0 代表其相似群；n 为 G 和 G^0 中矩阵的阶，即类型为 A_m 时 $n = m+1$，类型为 B_m 时 $n = 2m+1$，类型为 C_m 和 D_m 时 $n = 2m$。另外 $\lambda_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$，$\varepsilon_0 = \varepsilon_i + \varepsilon_{i'}$（其中 $i' = n+1-i$）。这样在 C_m 和 D_m 型时 $n = 2m$ 是偶数，并且 $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_n = \cdots = \varepsilon_m + \varepsilon_{m+1}$，$\lambda_0 = m\varepsilon_0$；在 B_m 型时 $n = 2m+1$ 是奇数，并且 $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_n = \cdots = \varepsilon_m + \varepsilon_{m+2} = 2\varepsilon_{m+1}$，$2\lambda_0 = n\varepsilon_0$。

4.1 Schur 代数的逆极限与典型李代数的泛包络代数（基域 $\mathbb{C}$）

本节将在复数域 $\mathbb{C}$ 上构造 Schur 代数的逆系统，并且从其逆极限中恢复相应典型李代数 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$。

回顾在 3.3节中，Schur 代数 $S^X(n,r)$定义为表示映射

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^n)^{\otimes r})$$

的像集，其中 $\mathbb{C}^n$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的标准表示。根据推论 3.4，Schur 代数是同构于 $\bigoplus_{\lambda\in\pi^X(n,r)} \mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C})$ 的半单代数，其中 $\pi^X(n,r)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的支配权集的子集，见定理 3.1。

引理 4.1: （1）对任意类型 X_m，任意非负整数 $r \in \mathbb{N}_0$ 和任意正整数 $n \in \mathbb{N}$，集合 $\pi^X(n,r)$ 是 $\pi^X(n,n+r)$的子集，从而诱导了 Schur 代数之间的满射

$$\phi_n : S^X(n,n+r) \twoheadrightarrow S^X(n,r)。$$

（2）对任意 $i=0,1,\ldots,n-1$，由 Schur 代数构成的集合 $\{S^X(n,kn+i):k\geq 0\}$ 是一个逆系统。我们记其逆极限 $\varprojlim_{k\geqslant 0}S^X(n,kn+i)$。

（3）类型为 A_m 时，Schur 代数的逆极限的直和为

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1}\varprojlim_{k\geqslant 0}S^A(n,kn+i)=\prod_{\lambda\in\Lambda^+(A_m)}\mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C}),$$

在类型为 B_m、C_m 和 D_m 时，逆极限的直和 $\bigoplus_{i=0}^{n-1}\varprojlim_{k\geqslant 0}S^X(n,kn+i)$ 包含

$$\prod_{\lambda\in\Lambda^+(X_m)_{int}}\mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C})$$

作为子代数，其中 $\Lambda^+(X_m)$ 是相应李代数的支配权集，$\Lambda^+(X_m)_{int}$ 是其中整数系数的支配权构成的子集（见 2.2节）。

证明:（1）根据定理 3.1可得 $\pi^X(n,r)\subseteq\pi^X(n,n+r)$。根据推论 3.4，我们有 $\mathbb{C}$-代数的同构

$$\begin{aligned}S^X(n,r)&\cong\bigoplus_{\lambda\in\pi^X(n,r)}\mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C})\\S^X(n,n+r)&\cong\bigoplus_{\lambda\in\pi^X(n,n+r)}\mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C})\end{aligned}$$

其中 d_λ 为相应李代数的最高权为 λ 的既约表示 $V(\lambda)$ 的维数。因此Schur 代数 $S^X(n,r)$ 是 Schur 代数 $S^X(n,n+r)$ 的直和项，同时也是它的商，并且商映射 $\phi_n:S^X(n,n+r)\twoheadrightarrow S^X(n,r)$ 限制到以 $\lambda\in\pi^X(n,r)$ 为指标的单代数 $\mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C})$ 上为恒等映射。

（2）对任意 $i=0,1,\ldots,n-1$，及 $0\leqslant k_1\leqslant k_2$，由如下的 (k_2-k_1) 个映射 ϕ_n

$$S^X(n,k_2n+i)\twoheadrightarrow S^X(n,(k_2-1)n+i)\twoheadrightarrow\cdots$$

$$\twoheadrightarrow S^X(n,r(k_1+1)n+i)\twoheadrightarrow S^X(n,k_1n+i)$$

复合可得 Schur 代数之间的满射

$$(\phi_n)^{k_2,\,k_1}: S^X(n, k_2n+i) \twoheadrightarrow S^X(n, k_1n+i)。$$

并且对任意 $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3$，总有 $(\phi_n)^{k_3,\,k_1} = (\phi_n)^{k_2,\,k_1} \circ (\phi_n)^{k_3,\,k_2}$。从而集合 $\{S^X(n, kn+i) : k \geqslant 0\}$ 成为一个以非负整数 $\mathbb{N}_0$（在自然序下）为指标集的逆系统。

（3）对 $i = 1, 2, \ldots, n-1$，逆系统 $\{S^X(n, kn+i) : k \geqslant 0\}$ 的逆极限 $\varprojlim_{k\geqslant 0} S^X(n, kn+i)$ 为

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{\lambda\in\pi^X(n,kn+i)} \mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C}) = \prod_{\lambda\in\cup_{k\geqslant 0}\pi^X(n,kn+i)} \mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C})。$$

对这些逆极限取直和，我们得到

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1} \varprojlim_{k\geqslant 0} S^X(n, kn+i) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \prod_{\lambda\in\cup_{k\geqslant 0}\pi^X(n,kn+i)} \mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C})。$$

注意在类型为 A_m 时，我们有

$$\bigcup_{i=0}^{n-1}\bigcup_{k\geqslant 0} \pi^A(n, kn+i) = \Lambda^+(A_m) = \Lambda^+(A_m)_{int}。$$

在类型为 B_m、C_m 和 D_m 时，同一个支配权 $\lambda \in \Lambda^+(X_m)_{int} = \bigcup_{r\geqslant 0} \pi^X(n, r)$ 可以重复地出现在不同的集合 $\bigcup_{k\geqslant 0} \pi^X(n, kn+i)$（对于不同的 $i = 0, \ldots, n-1$）中，且最多可能出现 n 次。因此逆极限的直和包含 $\prod_{\lambda\in\Lambda^+(X_m)_{int}} \mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C})$ 作为子代数。 ■

根据文献 [4]（其中考虑的是量子情形），一般线性李代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 的泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ 被包含在 A_m 型 Schur 代数的逆极限的直和之中（另见 [45–47]）。下面的命题说明这一结论对所有典型李代数都成立。

命题 4.1: 我们有如下的交换图表，其中 $\mathfrak{g}$ 是 B、C、D 型的典型李代数，映射 ρ^X 是从泛包络代数到 Schur 代数逆极限的代数单射，并且每个面都交换。

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n) \arrow[dll, "\rho^A"'] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bigoplus_{i=0}^{n-1} \varprojlim_k S^A(n,kn+i) & S^A(n,r) & & S^A(n,n+r) \arrow[ll, two heads] \\
 & & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[uu, dashed] \arrow[dll, dashed, "\rho^X"'] \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\
\bigoplus_{i=0}^{n-1} \varprojlim_k S^X(n,kn+i) \arrow[uu] & S^X(n,r) \arrow[uu] & & S^X(n,n+r) \arrow[ll, two heads] \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

证明: 注意到 B、C、D 型的典型李代数 $\mathfrak{g}$ 是一般线性李代数 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 的李子代数，从而泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ 的子代数。因此根据 Schur 代数的定义，B、C、D 型的 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 自然是 A 型 Schur 代数 $S^A(n,r)$ 的子代数，故命题中由泛包络代数和 Schur 代数构成的两个四边形都是交换图表。

事实上 Schur 代数的嵌入映射 $S^X(n,r) \hookrightarrow S^A(n,r)$ 是由集合的包含关系 $\pi^X(n,r) \subseteq \pi^A(n,r)$ 诱导的，并且由集合的包含映射构成的图表

$$\begin{array}{ccc}
\pi^X(n,r) & \longrightarrow & \pi^X(n,n+r) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\pi^A(n,r) & \longrightarrow & \pi^A(n,n+r)
\end{array}$$

交换，因此命题中由 Schur 代数构成的四边形是交换的。

由文献 [4]，A 型 Schur 代数之间的满射 $S^X(n,n+r) \twoheadrightarrow S^X(n,r)$ 与表示映射 $\rho^r: \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^n)^{\otimes r})$ 相容，故而命题中由 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n)$ 与 A 型 Schur 代数构成的三角形是交换图表。现在三棱住的最后一个面,即由泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 与 Schur 代数构成的三角形，必须也是交换的。由此根据逆系统的性质可知，存在从泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 到 Schur 代数逆极限的代数映射，记为

$$\rho^X: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{n-1} \varprojlim{}_k S^X(n,kn+i)。$$

根据文献 [4]，在 A 型时，该映射

$$\rho^A : \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})) \longrightarrow \prod_{\lambda \in P_{++}(A_m)} M_{d_\lambda}(\mathbb{C})$$

是单射。换言之，对任意泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n)$ 中的元素 u，总存在非负整数 $N \geqslant 0$ 使得在表示映射

$$\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^n)^{\otimes N})$$

下，元素 U 的像非零。

一般地，当类型为 B、C、D时，李代数的泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$ 的子代数。所以对于 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 中的任意元素 u'，总存在非负整数 $N' \geqslant 0$ 使得在表示映射

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^n)^{\otimes N'})$$

下，元素 u' 的像非零。这就是说，元素 u' 在 $S^X(n, r')$ 中的像非零。因此映射 ρ^X 是单射。 ■

当类型为 B、C、D 时，Schur 代数有更强的逆系统，且与上面得到的逆系统相容。

定理 4.1: 设类型 $X \neq A$，以下结论成立：

（1）对任意非负整数 $r \in \mathbb{N}_0$，集合 $\pi^X(n, r)$ 总是集合 $\pi^X(n, r+2)$ 的子集；并且对 $i = 0, 1$，由 Schur 代数构成的集合 $\{S^X(n, 2k+i) : k \geqslant 0\}$是逆系统。

（2）对于 $i = 0, 1$ 和 $j = 0, 1, \ldots, n-1$，当类型为 B 时，

$$\varprojlim_{k \geqslant 0} S^X(n, 2k+i) = \varprojlim_{k \geqslant 0} S^X(n, kn+j) = \prod_{\lambda \in \Lambda^+(B_m)_{int}} \mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C})。$$

当类型为 C 和 D 时，

$$\varprojlim_{k \geqslant 0} S^X(n, 2k+i) = \varprojlim_{k \geqslant 0} S^X(n, kn+j), \quad \forall\, i \equiv j \ (\mathrm{mod}\ 2),$$

并且

$$\bigoplus_{i=0}^{1} \varprojlim_{k\geqslant 0} S^X(n,2k+i) = \prod_{\lambda\in\Lambda^+(X_m)_{int}} \mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C})。$$

（3）此时，典型李代数的泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 被包含在逆极限 $\prod_{\lambda\in\Lambda^+(X_m)_{int}} \mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C})$ 中。

证明:（1）类似于引理 4.1（1）的证明可知，集合 $\{S^X(n,2k) : k \geqslant 0\}$ 和 $\{S^X(n,2k+1) : k \geqslant 0\}$ 都是逆系统，并且其逆极限分别为

$$\varprojlim_{k\geqslant 0} S^X(n,2k) = \prod_{\pi^{\text{even}}} M_{d_\lambda}(\mathbb{C})$$

和

$$\varprojlim_{k\geqslant 0} S^X(n,2k+1) = \prod_{\pi^{\text{odd}}} M_{d_\lambda}(\mathbb{C}),$$

其中 $\pi^{\text{even}} = \bigcup_{k\geqslant 0} \pi^X(n,2k)$，$\pi^{\text{odd}} = \bigcup_{k\geqslant 0} \pi^X(n,2k+1)$。

（2）我们记 $\phi_2 : S^X(n,r+2) \twoheadrightarrow S^X(n,r)$为由集合的包含关系 $\pi^X(n,r) \subseteq \pi^X(n,n+2)$ 诱导的代数满射，则 ϕ_2 和 $\phi_n : S^X(n,n+r) \longrightarrow S^X(n,r)$ 是相容的。在类型为 B_m 时，$n = 2m+1$是奇数，因此

$$(\phi_n)^2 = (\phi_2)^n : S^B(n,2n+r) \longrightarrow S^B(n,r)$$

其中乘积代表映射的复合。注意到而权集 $\pi^B(n,r)$ 同时是 $\pi^B(n,r+2)$ 和 $\pi^B(n,n+r)$ 的子集，因此对任意 $j = 0,1,\ldots,n-1$，

$$\pi^{\text{odd}} = \pi^{\text{even}} = \bigcup_{k\geqslant 0} \pi^B(n,kn+j) = \Lambda^+(B_m)_{int}。$$

在类型为 C_m 和 D_m 时，$n = 2m$ 是偶数，因此

$$\phi_n = (\phi_2)^m : S^X(n,n+r) \twoheadrightarrow S^X(n,r),$$

并且 $\pi^{\text{odd}} \bigcap \pi^{\text{even}}$ 是空集。因此 Schur 代数的逆极限有着定理中陈述的形式。

（3）注意到对任意 $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$，若存在非负整数$N$使得 u 在表示映射

$\rho^N : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow S^X(n, N)$ 下的像非零，则 u 在表示映射 ρ^{N+2} 和 ρ^{N+n} 下的像均非零。由类似于命题 4.1的论述可以证明，相应李代数的泛包络代数包含在该逆极限中。 ■

例 4.1: 考虑类型 B_2（$n = 5$），由定理 3.1可知对任意非负整数 $r \geqslant 0$，

$$\pi^B(5, r) = \bigcup_{i \geqslant 0} \Lambda^+(2, r - 2i) \cup \bigcup_{i \geqslant 0} \Lambda_i^+(2, r - (2i + 1))$$

其中，剖分 $(a_1, a_2) \in \Lambda^+(2, a_1 + a_2)$ 相当于支配权 $a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2$，并且

$$\begin{aligned}
\Lambda_0^+(2, r) &= \{(a_1, a_2) \in \Lambda^+(2, r) : a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0\}, \\
\Lambda_1^+(2, r) &= \{(a_1, a_2) \in \Lambda^+(2, r) : a_1 \neq 0\}, \\
\Lambda_i^+(2, r) &= \Lambda^+(2, r), \quad \forall\, i \geqslant 2。
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\pi^B(5, 0) &= \{0\}, \\
\pi^B(5, 1) &= \{\varepsilon_1\}, \\
\pi^B(5, 2) &= \{2\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2; 0\}, \\
\pi^B(5, 3) &= \{3\varepsilon_1, 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2; \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \varepsilon_1\}, \\
\pi^B(5, 4) &= \{4\varepsilon_1, 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2, 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_2; 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2; 2\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \varepsilon_1; 0\}, \\
\pi^B(5, 5) &= \{5\varepsilon_1, 4\varepsilon_1 + \varepsilon_2, 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2; 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2, 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_2; \\
&\qquad 3\varepsilon_1, 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2; 2\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \varepsilon_1; 0\}, \\
\pi^B(5, 6) &= \{6\varepsilon_1, 5\varepsilon_1 + \varepsilon_2, 4\varepsilon_2 + 2\varepsilon_2, 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2; 4\varepsilon_1 + \varepsilon_2, 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2; \\
&\qquad 4\varepsilon_1, 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2, 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_2; 3\varepsilon_1, 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2; 2\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \varepsilon_1; 0\}, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

事实上对任意 $r \geqslant 0$，

$$\begin{aligned}\pi^B(5,r) &= \bigcup_{i=0}^{r} \Lambda^+(2,i) \backslash \{(r-1,0)\} \\ &= \{a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 : a_1 \geqslant a_2,\ a_1+a_2 \leqslant r,\ a_1,a_2 \in \mathbb{N}_0\} \backslash \{(r-1)\varepsilon_1\},\end{aligned}$$

并且

$$\pi^B(5,r) \subseteq (\pi^B(5,r+2) \cap \pi^B(5,r+5)),$$

$$\begin{aligned}\pi^{odd} &\triangleq \bigcup_{k\geqslant 0} \pi^B(5,2k+1) = \bigcup_{k\geqslant 0} \pi^B(5,2k) \triangleq \pi^{even} \\ &= \bigcup_{r\geqslant 0} \pi^B(5,r) = \bigcup_{i\geqslant 0} \Lambda^+(2,i) = \Lambda^+(B_2)_{int} \\ &= \bigcup_{k\geqslant 0} \pi^B(5,5k+j),\ \forall\, j = 0,1,2,3,4。\end{aligned}$$

■

4.2 典型群的 Schur 代数的逆系统和逆极限（基域 K）

本节中基域为特征不等于 2 的代数封闭域 K，我们将通过余代数的实现方式把上一节中得到的复数域$\mathbb{C}$上 Schur 的逆系统推广到 K 上。

固定一个类型 X_m。设 K 是相似群 G^0 的一个一维多项式表示，表示映射为 $\rho : KG^0 \longrightarrow K$。易见这是一个既约表示，因此是一个齐次多项式表示。设其最高权为 μ，次数为 r_0。记其表示空间是 K_μ，有 K-基 $\{1\}$。则 K_μ 是相似群 G^0 的最高权为 μ 的既约表示，并且是 r_0 次齐次多项式表示。我们记 K_μ 的系数函数为 f_0，这是一个 $K\langle G^0\rangle_{r_0}$ 中的多项式，满足$\forall\, g \in G^0$，

$$\rho(g) = f_0(g) \in K \cong \mathrm{End}(K_\mu)。$$

回顾 2.2节中，$K\langle G^0\rangle_{r_0} = K[c_{ij}]_{r_0}/I\langle G^0\rangle_{r_0}$ 是一个余代数，其余代数结构由

$K[c_{ij}]_{r_0}$ 的余代数结构诱导而得，并且

$$I\langle G^0\rangle_{r_0} = \{c \in K[c_{ij}]_{r_0} : c(g) = 0,\ \forall\, g \in G^0\}。$$

引理 4.2: （1）余代数 $K\langle G^0\rangle_{r_0}$ 的余乘 Δ 把多项式 f_0 映到 $f_0 \otimes f_0$。

（2）对任意非负整数 $r \geqslant 0$，乘以多项式 f_0 给出了余代数之间的一个单射

$$(\cdot f_0) : K\langle G^0\rangle_r \hookrightarrow K\langle G^0\rangle_{r+r_0}。$$

证明: （1）由引理 2.2，多项式表示 K_μ 的系数空间 $cf(K_\mu)$ 是 $K\langle G^0\rangle_{r_0}$ 的余子代数。对相似群 G^0 中的任意群元素 g 和 h，我们有

$$\Delta(f_0)(g \otimes h) = f_0(g \cdot h) = \rho(g \cdot h) = \rho(g) \cdot \rho(h) = f_0(g) \cdot f_0(h)。$$

因此，在余代数 $K\langle G^0\rangle_{r_0}$ 的余乘 Δ 下，$\Delta(f_0) = f_0 \otimes f_0$。

（2）根据 (1)，乘以 f_0 诱导了从 $K[c_{ij}]_r$ 到 $K[c_{ij}]_{r+r_0}$ 的余代数映射，而因为多项式环没有零因子，所以这是一个单射。注意到 f_0 与 $I\langle G^0\rangle_r$ 的乘积落在 $I\langle G^0\rangle_{r+r_0}$ 中，因此乘以 f_0 诱导了一个良定的映射

$$(\cdot f_0) : K\langle G^0\rangle_r \longrightarrow K\langle G^0\rangle_{r+r_0}。$$

设 c 是 $K[c_{ij}]_r$ 中满足 $c \cdot f_0 = 0 \in K\langle G^0\rangle_{r+r_0}$的多项式，即 $c \cdot f_0 \in I\langle G^0\rangle_{r+r_0}$，这样$\forall\, g \in G^0$，

$$0 = (c \cdot f_0)(g) = c(g) \cdot f_0(g)。$$

而因为 $\rho : KG^0 \longrightarrow K$ 是一个表示映射，所以对任意群元素 $g \in G^0$，总有 $\rho(g) = f_0(g) \neq 0$。故而对任意 $g \in G^0$，$c(g) = 0$。也就是说，多项式 c 属于 $I\langle G^0\rangle_r$。这就证明了上面定义的余代数映射 $(\cdot f_0) : K\langle G^0\rangle_r \longrightarrow K\langle G^0\rangle_{r+r_0}$ 是单射。 ■

由推论 3.1，通过取线性对偶，我们可以得到 Schur 代数之间的满射

$$(\cdot f_0)^* : S^X(n, r + r_0) \twoheadrightarrow S^X(n, r)。$$

这个满射提供了由 Schur 代数构造逆系统的桥梁。

给定称范畴之间的函子$F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$，如果 F 在 $\mathcal{C}$ 的对象上是单射，并且对任意 $A,B\in\mathcal{C}$，$F:Hom_{\mathcal{C}}(A,B)\longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$是双射，则称 F 是一个满子嵌入（full embedding）。

命题 4.2: （1）对非负整数 $r=0,1,\ldots,r_0-1$，由 Schur 代数 $\{S^X(n,r+r_0k):k\geqslant 0\}$ 构成的集合是一个逆系统。我们记 $\varprojlim_{k\geqslant 0}S^X(n,r+r_0k)$ 为该逆系统的逆极限。

（2）满射 $(\cdot f_0)^*:S^X(n,r+r_0)\longrightarrow S^X(n,r)$ 诱导了从范畴 $M^X(n,r)\simeq mod(S^X(n,r))$ 到范畴 $M^X(n,r+r_0)\simeq mod(S^X(n,r+r_0))$ 的一个满子嵌入，它把范畴 $M^X(n,r)$ 中的对象 V 映为 $V\otimes_K K_\mu$。我们也把该函子记为 $(\cdot f_0)^*$。

证明: （1）类似于引理 4.1（1）的证明可得。

（2）作为代数之间的满射，$(\cdot f_0)^*:S^X(n,r+r_0)\twoheadrightarrow S^X(n,r)$ 自然诱导了模范畴之间（相反方向）的满子嵌入。任取范畴 $M^X(n,r)$ 中的一个对象 V，我们来证明它在诱导函子 $(\cdot f_0)^*$ 下的像是 $V\otimes_K K_\mu$。设 V 有 K-基 $\{v_i\}$ 和系数函数 $\{r_{ij}\}\in K\langle G^0\rangle_r$，则 $\forall\, s\in S^X(n,r)$，

$$s\cdot v_j=\sum_i r_{ij}(s)v_i=\sum_i s(r_{ij})v_i。$$

代数 $S^X(n,r+r_0)$ 中的元素 s' 通过 $(\cdot f_0)^*(s')$ 作用在 V 上，即

$$s'\cdot v_j=\sum_i(\cdot f_0)^*(s')\cdot v_j=\sum_i s'(r_{ij}f_o)v_i。$$

因此 V 在范畴 $M^X(n,r+r_0)$ 中的像 $(\cdot f_0)^*(V)$ 与 V 有相同的 K-基 $\{v_i\}$，并且其系数函数为 $r_{ij}\cdot f_0\in K\langle G^0\rangle_{r+r_0}$。通过将表示 $(\cdot f_0)^*(V)$ 中的元素 v_i 与表示 $V\otimes_K K_\mu$ 中的元素 $v_i\otimes 1$ 等同起来，我们不难发现作为范畴 $M^X(n,r+r_0)$ 中的对象 $(\cdot f_0)^*(V)\cong V\otimes_K K_\mu$。 ■

对上述构造逆系统的步骤我们有两个例子。首先考虑相似群 G^0 的把群元素映到其行列式的一维表示，这是一个 n 次齐次多项式表示，其系数函数为 $\det=\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n c_{i,\sigma(i)}$（其中 Σ_n 为 n 阶对称群），最高权为

$\lambda_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$。对任意非负整数 $r \geqslant 0$，我们有 Schur 代数之间的满射

$$(\cdot\det)^* : S^X(n, r+n) \twoheadrightarrow S^X(n, r),$$

和范畴之间的满子嵌入

$$(\cdot\det)^* : M^X(n, r) \hookrightarrow M^X(n, r+n)。$$

同时在支配权的水平上，我们有从权集 $\pi_0^X(n, r)$ 到 $\pi_0^X(n, r+n)$ 的一个嵌入，把 $\lambda \in \pi_0^X(n, r)$ 映为 $\lambda + \lambda_0$。因此对于任意非负整数 $0 \leqslant r \leqslant n-1$，Schur 代数的集合 $\{S^X(n, r+nk) : k \geqslant 0\}$ 构成了一个逆系统。

其次，在类型为 B、C 和 D 时，还可以考虑相似群 G^0 上的把群元素 g 映到 $c_0(g)$的一维表示，其中 c_0 是一个 2.2节中定义的 2 次多项式（回顾当类型为 B 和 D 时 $c_0 = \sum_{k=1}^n c_{ki}c_{k'n}$，当类型为 C 时 $c_0 = \sum_{k=1}^n \epsilon(k) c_{k1} c_{k'n}$，其中 $k' = n+1-k$，当 $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$ 时 $\epsilon(k) = 1$，当 $\frac{n}{2} \leq k \leqslant n$ 时 $\epsilon(k) = -1$）。这是一个 2 次齐次多项式表示，其系数函数为 c_0，最高权为 $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_n$。从而对任意非负整数 $r \geqslant 0$，我们有 Schur 代数之间的满射

$$(\cdot c_0)^* : S^X(n, r+2) \twoheadrightarrow S^X(n, r),$$

和范畴之间的满子嵌入

$$(\cdot c_0)^* : M^X(n, r) \hookrightarrow M^X(n, r+2),$$

以及从集合 $\pi_0^X(n, r)$ 到集合 $\pi_0^X(n, r+2)$ 的一个嵌入，把 $\lambda \in \pi_0^X(n, r)$ 映为 $\lambda + \varepsilon_0$。当 $r = 0$ 和 $r = 1$ 时，Schur 代数的集合 $\{S^X(n, r+2k) : k \geqslant 0\}$ 构成了一个逆系统。

注记 4.1: 当 $K = \mathbb{C}$ 时，Schur代数之间的满射 $(\cdot\det)^*$ 和 $(c_0)^*$ 恰分别为上一节中由权集 $\pi^X(n, r)$ 的包含关系所诱导的满射 ϕ_n 和 ϕ_2。 ■

引理 4.3: 考虑上面定义的多项式 $f_0 = \det$（类型为 A、B、C、D），和多项式 $f_0 = c_0$（类型为 B、C、D），记 r_0 为其次数，记 μ 为相应一维表示的最高权。则对任意的支配权 $\lambda \in \pi_0^X(n, r)$，函子 $(\cdot f_0)^* : M^X(n, r) \hookrightarrow M^X(n, r+r_0)$

把相似群 G^0 的 Weyl 模 $W(\lambda)$ 映到 Weyl 模 $W(\lambda+\mu)$，同时把单模 $L(\lambda)$ 映到单模 $L(\lambda+\mu)$。

证明: 来证明 $f_0=\det$ 的情形（$f_0=c_0$ 的情形是类似的），此时 $r_0=n$，$\mu=\lambda_0$。以 f_0 为系数函数的 G^0 上的一维表示既是最高权为 μ 的单模，又是最高权为 μ 的 Weyl 模。

根据文献 [52]，代数群 G^0 上 Weyl 模的张量积有一个以 Weyl 模为截面的滤。因此张量积 $W(\lambda)\otimes_K K_{\lambda_0}$ 有一个以 Weyl 模为截面的滤。注意到 $\lambda+\lambda_0$ 是该张量积的最高权，故而 Weyl 模 $W(\lambda+\lambda_0)$ 是该张量积 $W(\lambda)\otimes_K K_{\lambda_0}$ 的商模。相似群 G^0 上的 Weyl 模限制到相应的典型群 G 上还是 Weyl 模，并且维数相等，最高权通过模 λ_0 得到（见 3.4节中推论 3.6前的段落）。因此 G^0 上的 Weyl 模 $W(\lambda)$ 和 $W(\lambda+\lambda_0)$ 到典型群 G 上的限制相等，特别的 $\dim W(\lambda)=\dim W(\lambda+\lambda_0)$。但是 $\dim W(\lambda)=\dim(W(\lambda)\otimes_K K_{\lambda_0})$，所以必须有

$$W(\lambda)\otimes_K K_{\lambda_0}\cong W(\lambda+\lambda_0)。$$

我们已经证明了函子 $(\cdot\det)^*$ 把 G^0 上的 Weyl 模 $W(\lambda)\in M^X(n,r)$ 映到 Weyl 模 $W(\lambda+\lambda_0)\in M^X(n,r+n)$。类似地可以证明 $(\cdot f_0)^*$ 把单模 $L(\lambda)\in M^X(n,r)$ 映为 $L(\lambda)\otimes_K K_{\lambda_0}\cong L(\lambda+\lambda_0)\in M^X(n,r+n)$。 ■

根据注 2.3我们知道作为相似群 G^0 上的多项式，在类型为 B_m（$m\geqslant 2$ ）时，$(\det)^2=(c_0)^n$，因此有 $((\cdot\det)^*)^2=((\cdot c_0)^*)^n$，其中映射的乘法为映射的复合；在类型为 C_m（$m\geqslant 2$）和 D_m（$m\geqslant 4$）时，$\det=(c_0)^m$，因此有 $(\cdot\det)^*=((\cdot c_0)^*)^m$。这样在类型为 B、C、D 时，上面得到的两种逆系统就可以联系起来了（比较定理 4.1）。

命题 4.3: 对任意 $j=0,1,\ldots,n-1$ 和 $i=0,1$，在类型为 B_m（$m\geqslant 2$）时，我们有

$$\varprojlim_{k\geqslant 0} S^X(n,j+kn)=\varprojlim_{k\geqslant 0} S^X(n,i+2k);$$

在类型为 C_m（$m\geqslant 2$）和 D_m（$m\geqslant 4$）并且当 $i\equiv j\ (mod\ 2)$ 时我们有

$$\varprojlim_{k\geqslant 0} S^X(n,j+kn)=\varprojlim_{k\geqslant 0} S^X(n,i+2k)。$$

在类型为 A_m 时，令

$$IL(A_m) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \varprojlim_{k\geqslant 0} S^A(n, i+kn)。$$

在类型为 B_m 时，令

$$IL(B_m) = \varprojlim_{k\geqslant 0} S^B(n, i+kn),$$

其中 i 为任意非负整数。在类型为 C_m 和 D_m 时，令

$$IL(X_m) = \bigoplus_{i=0}^{1} \varprojlim_{k\geqslant 0} S^X(n, i+2k)。$$

注记 4.2: 因为余代数 $K\langle G^0\rangle_r$ 以及单射 $(\cdot\det) : K\langle G^0\rangle_r \longrightarrow K\langle G^0\rangle_{r+n}$ 和 $(\cdot c_0) : K\langle G^0\rangle \longrightarrow K\langle G^0\rangle_{r+2}$ 均可以在整数环 $\mathbb{Z}$ 上整性地定义，所以上面定义的 Schur 代数的逆系统和逆极限也都可以在整数环 $\mathbb{Z}$ 上定义，并且 $IL_K(X_m) = IL_{\mathbb{Z}}(X_m) \otimes_{\mathbb{Z}} K$。 ■

4.3 从 Schur 代数中重建典型群的超代数（基域 K）

本节中基域是特征不等于 2 的代数封闭域 K，我们将证明典型群的超代数可以嵌入到上一节构造的 Schur 代数的逆极限 $IL(X_m)$ 中。

我们来回顾 Jantzen 对代数群的超代数（hyperalgebra）的定义 [53, pp. 116]，其中称超代数为分布（distributions），且定义在群概型上。设 H 是域 K 上的代数群，单位元为 1_H，仿射坐标环为 $K[H]$。令

$$\mathcal{I} = \{f \in K[H] : f(1_H) = 0\},$$

这是坐标环 $K[H]$ 的一个理想。代数群 H 的超代数 $hy(H)$ 就定义为

$$\bigcup_{k\geqslant 0} (K[H]/\mathcal{I}^{k+1})^*,$$

这是坐标环的线性对偶 $K[H]^*$ 的结合子代数，其乘法由 $K[H]$ 的余乘诱导，即 $\forall\, u, u' \in K[H]^*$ 和 $c \in K[H]$，$(u \cdot u')(c) = (u \otimes u')(\Delta(c))$。

注记 4.3: 等价的，代数群 H 的超代数 hyH 也可以通过在基域 K 上张量相应李代数 $\mathfrak{h}$ 的 Kostant-$\mathbb{Z}$ 形式定义。因此 $hy(H)$ 是整性的，即它可以定义在整数环 $\mathbb{Z}$ 上，并且通过在 $\mathbb{Z}$ 上张量 K 而得到 K 上的超代数。特别的，当基域 $K = \mathbb{C}$ 为复数域时，$hy(H)$ 同构于 $\mathfrak{h}$ 的泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$。 ■

给定代数群 H 上的一个有理表示 V，它自然是群代数 KH 上的模，记其表示映射为 $\rho : KH \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$。设 V 有 K-基 $\{v_i\}$，且相应的系数函数为 $\{r_{ij}\}$，则 $\forall\, g \in G^0$，$\rho(g)(v_j) = \sum_i r_{ij}(g) v_i$。在结构映射

$$\rho^* : V \longrightarrow V \otimes K[H], \quad \rho^*(v_j) = \sum_i v_i \otimes r_{ij}$$

下，V 自然的成为一个右 $K[H]$-余模。任给超代数 $hy(H)$ 中一个元素 u，考虑复合映射

$$V \xrightarrow{\rho^*} V \otimes K[H] \xrightarrow{1 \otimes u} V \otimes_K K \xrightarrow{\simeq} V$$

其中第二个映射为 $1 \otimes u$ 在 $V \otimes K[H]$ 上的取值。这样 u 就成了 V 的自同态环 $\mathrm{End}_K(V)$ 中的元素，从而 V 也成为了超代数 $hy(H)$ 上的模（见 Jantzen [53, pp. 119]）。我们记

$$\tilde{\rho} : hy(H) \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$$

为其表示映射，则对任意$u \in hyH$，

$$\tilde{\rho}(u)(v_j) = \sum_i u(r_{ij}) v_i。$$

引理 4.4: 设 V 如上所述，则作为 V 的自同态代数 $\mathrm{End}_K(V)$ 的子代数，$\mathrm{Im}(\rho)$ 同构于 $\mathrm{Im}(\tilde{\rho})$。

证明: 根据定义，

$$\mathrm{Ker}(\tilde{\rho}) \;=\; \{u \in hy(H) : r_{ij}(u) = 0,\ \forall\, i, j\}$$

$$= \ \{u \in hy(H) : c(u) = 0, \forall\, c \in cf(V)\}。$$

因为超代数 $hy(H)$ 是坐标环的线性对偶 $K[H]^*$ 的子代数，系数空间 $cf(V)$ 是坐标环 $K[H]$ 的余子代数，所以 $hy(H)$ 中的元素可以视为 $cf(V)$ 上的线性函数，即存在线性映射 $hy(H) \longrightarrow (cf(V))^*$，记该映射为 φ。注意到 φ 是一个代数映射，并且

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\tilde{\rho})。$$

因此 φ 诱导了代数之间的单射

$$\bar{\varphi} : \mathrm{Im}(\tilde{\rho}) \hookrightarrow (cf(V))^*,$$

对偶地，又诱导了余代数之间的满射

$$\bar{\varphi}^* : cf(V) \twoheadrightarrow (\mathrm{Im}(\tilde{\rho}))^*。$$

根据坐标环 $K[H]$ 的分次结构不难发现超代数 $hy(H)$ 在 $K[H]^*$ 中稠密，即任意 $K[H]$ 中非零元 c，总存在 $u \in hy(H)$ 使得 $c(u) \neq 0$。现在设 $\bar{\varphi}^*(c) = 0$，即对任意 $u \in \mathrm{Im}(\tilde{\rho})$，$\bar{\varphi}^*(c)(u) = 0$。注意到 c 把空间 $\mathrm{Ker}(\tilde{\rho})$ 化零，由此可得 $c = 0$。我们证明了映射 $\bar{\varphi}^*$ 是单射，从而它是余代数双射。等价的，映射 $\bar{\varphi}$ 是代数双射。

另一方面由引理 2.3知，$cf(V)^*$ 代数同构于 $\mathrm{Im}(\rho)$。因此作为 V 的自同态代数 $\mathrm{End}_K(V)$ 的子代数，$\mathrm{Im}(\rho) \cong \mathrm{Im}(\tilde{\rho})$。 ■

现在考虑典型群 G 及其 r 次齐次多项式表示 $E^{\otimes r}$（$r \geqslant 1$），则 $E^{\otimes r}$ 也是 G 的超代数 $hy(G)$ 上的模，其表示映射分别为

$$\rho^r : KG \longrightarrow \mathrm{End}_K(E^{\otimes r})$$

和

$$\tilde{\rho^r} : hy(G) \longrightarrow \mathrm{End}_K(E^{\otimes r})。$$

由引理 4.4知，表示映射 $\tilde{\rho^r}$ 经过 Schur 代数 $S^X(n,r) = \mathrm{Im}(\rho^r) \cong \mathrm{Im}(\tilde{\rho^r})$ 分解。

注记 4.4: 在文献 [26]中，Donkin 考虑了超代数 $hy(G)$ 的零化所有 $S^X(n,r)$-模（相应于典型群 G 上的一些多项式表示，从而是 $hy(G)$-模）的元素生成的理想，并且把 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 实现为超代数 $hy(G)$ 模掉该理想而得到的商。由于 $E^{\otimes r}$ 是 $S^X(n,r)$ 上的忠实模，所以该理想恰为表示映射 $\tilde{\rho}^r$ 的核 $\mathrm{Ker}(\tilde{\rho}^r)$。Donkin 还证明了该理想是一个整理想，由此可知表示映射 $\tilde{\rho}^r$ 是整性的，即它可以定义在整数环 $\mathbb{Z}$ 上，并且 $\tilde{\rho}^r{}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Id}_K = \tilde{\rho}^r{}_K$。 ■

接下来的引理证明了在 4.2节中构造的 Schur 代数之间的满射 $(\cdot\det)^* : S^X(n,r+n) \twoheadrightarrow S^X(n,r)$（所有类型）和 $(\cdot c_0)^* : S^X(n,r+2) \twoheadrightarrow S^X(n,r)$（类型 B、C、D），与表示映射 $\rho^r : KG \longrightarrow S^X(n,r)$ 和 $\tilde{\rho}^r : hy(G) \longrightarrow S^X(n,r)$ 是相容的。

引理 4.5: 我们有如下交换图表，其中映射 $(\cdot\det)^*$ 对所有的类型定义，而映射 $(\cdot c_0)^*$ 仅对 B、C、D 型定义：

$$\begin{tikzcd} & KG \arrow[dl, "\rho^r"'] \arrow[dr, "\rho^{r+n}"] & \\ S^X(n,r) & & S^X(n,n+r) \arrow[ll, "(\cdot\det)^*"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & KG \arrow[dl, "\rho^r"'] \arrow[dr, "\rho^{r+2}"] & \\ S^X(n,r) & & S^X(n,r+2) \arrow[ll, "(\cdot c_0)^*"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & hy(G) \arrow[dl, "\tilde{\rho}^r"'] \arrow[dr, "\tilde{\rho}^{r+n}"] & \\ S^X(n,r) & & S^X(n,n+r) \arrow[ll, "(\cdot\det)^*"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & hy(G) \arrow[dl, "\tilde{\rho}^r"'] \arrow[dr, "\tilde{\rho}^{r+2}"] & \\ S^X(n,r) & & S^X(n,r+2) \arrow[ll, "(\cdot c_0)^*"'] \end{tikzcd}$$

证明: 第一个图表：任给群元素 $g \in G$，我们需要证明在 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 中，等式

$$\rho^r(g) = (\cdot\det)^* \circ \rho^{r+n}(g)$$

成立，即等式两端在余代数 $K[G]^0_r$ 上的取值相等。根据定义，映射 $(\cdot\det)^*$ 是余代数的单射

$$(\cdot\det) : K[G]^0_r = K\langle G^0\rangle_r \hookrightarrow K\langle G^0\rangle_{r+n} = K[G]^0_{r+n}$$

的线性对偶。任取 $c \in K[G]^0_r$，我们有

$$((\cdot\det)^* \circ \rho^{r+n}(g))(c) \;=\; (\rho^{r+n}(g))(c \cdot \det) \;=\; (c \cdot \det)(g)$$

$$= \ c(g) \cdot \det(g) \ = \ c(g)$$

$$= \ (\rho^r(g))(c)$$

其中的映射 ρ^r 被 J. A. Green [2, pp. 23]中叫做赋值映射（evaluation map）。

其余的图表可由类似的论述，以及在典型群 G 及其超代数 $hy(G)$ 上成立的等式 $\det = 1$ 和 $c_0 = 1$得到。 ■

注记 4.5: 我们也可以考虑相似群 G^0 的超代数 $hy(G^0)$，并且把 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 实现为 $hy(G^0)$ 的商。但是因为等式 $\det = 1$ 和 $c_0 = 1$ 在 G^0 和 $hy(G^0)$ 上不再成立，类似于引理 4.5的图表对于 KG^0 或者 $hy(G^0)$ 不再是交换的。 ■

有了这些交换图表，根据逆极限的泛性质，我们知道存在从超代数 $hy(G)$ 到 Schur 代数的逆极限 $IL(X_m)$ 的代数映射，记为 τ_K。

定理 4.2: 典型群 G 的超代数 $hy(G)$ 被包含在 Schur 代数的逆极限中，即代数映射

$$\tau_K : hy_K(G) \longrightarrow IL_K(X_m)$$

是单射。

证明: 首先我们来证明 $\bigoplus_{r\geqslant 0} E^{\otimes r}$ 是超代数 $hy(G)$ 上的忠实表示。注意到作为典型群 G 上的一些多项式表示的直和，$\bigoplus_{r\geqslant 0} E^{\otimes r}$ 的系数空间恰为 G 的坐标环 $K[G]$。因为典型群的超代数 $hy(G)$ 被包含在坐标环 $K[G]$ 的线性对偶 $K[G]^*$ 中，故超代数中的任意非零元 $u \in hy(G)$ 在 $K[G]^*$ 也是非零元，从而存在坐标环中的元素 $c \in K[G]$ 使得 $c(u) \neq 0$。这实际上证明了表示映射

$$hy(G) \longrightarrow \mathrm{End}_K(\bigoplus_{r\geqslant 0} E^{\otimes r})$$

的核是平凡的，也就是说，表示 $\bigoplus_{r\geqslant 0} E^{\otimes r}$ 在超代数 $hy(G)$ 上是忠实的。

对每个非负整数 $r \geqslant 0$，超代数 $hy(G)$ 把表示 $\bigoplus_{r\geqslant 0} E^{\otimes r}$ 的直和项 $E^{\otimes r}$ 映到 $E^{\otimes r}$ 自身。因此对于超代数中的任意非零元 $u \in hy(G)$，存在非负整数 N 使得元素 u 非平凡的作用在 $E^{\otimes N}$ 上。换言之，表示映射

$$\tilde{\rho^N} : hy(G) \longrightarrow \mathrm{End}_K(E^{\otimes N})$$

把元素 u 映到 Schur 代数 $S^X(n,N)$ 中的非零元。因此在代数映射

$$\tau_K : hy_K(G) \longrightarrow IL_K(X_m)$$

下元素 u 的像非零，即映射 τ_K 是一个单射。注意在 B_m 型时 N 既可以取成奇数，又可以取成偶数（比较定理 4.1（3）的证明）。 ■

注记 4.6: 注意到表示映射 $\tilde{\rho^r}$ 可以整性地定义在 $\mathbb{Z}$ 上，因此通过逆极限的过渡，映射 τ_K 也可以整性地定义在 $\mathbb{Z}$ 上，并且 $\tau_K = \tau_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Id}_K$。 ■

4.4 典型群的 Schur 代数的拟遗传性（基域 K）

本节先回顾拟遗传代数和整性拟遗传代数的定义，然后证明 A、C、D 型的 Schur 代数是整性拟遗传的，并且 4.2节中定义的映射 $(\cdot\mathrm{det})^* : S^X(n,n+r) \twoheadrightarrow S^X(n,r)$ 和 $(\cdot c_0)^* : S^X(n,r+2) \twoheadrightarrow S^X(n,r)$与其拟遗传结构相容（命题 4.4）。最后将得到一个关于分解数的结论（推论 4.2）。

拟遗传代数和整性拟遗传代数是由 Cline，Parshall 和 Scott 为了刻划高权范畴而引入的 [31, 32]，另见 Klucznik 和 König 的讲义 [56]，以及 Donkin [57]的附录。设 S 是一个有限维结合 K-代数，J 是 S 的一个理想。如果存在幂等元 e 使得 $J = SeS$ 是射影 S-模，并且 $\mathrm{End}_S(J)$ 是半单的，则理想 J 被称为 S 的遗传理想。如果存在有限长度的理想链

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \cdots \subset J_n = S$$

使得对任意 j，J_j/J_{j-1} 是代数 S/J_{j-1} 的遗传理想，则代数 S 被称为拟遗传代数，该理想链被称为 S 的遗传链。如果遗传链可以整性地定义在整数环 $\mathbb{Z}$ 上，则称代数 S 是整性拟遗传的。注意遗传链未必唯一。

给定一个拟遗传代数 S 及一个如上所述的遗传链，设 $\pi = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 为有限维 S-单模同构类的集合，e_{λ_i} 为相应于 λ_i 的幂等元，其中 n 为 S 的遗传链的长度。则通过重排 π 中元素的次序可以使得对任意$1 \leqslant j \leqslant n$，

$$J_j = S(e_{\lambda_1} + e_{\lambda_2} + \cdots + e_{\lambda_j})S,$$

并且每个 J_j/J_{j-1} 实际上是对应于 λ_j 的标准模 $\Delta(\lambda_j)$ 的有限次直和。这样就赋予集合 π 一个序：$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$，且

$$Ext^1(\Delta(\lambda_i), \Delta(\lambda_j)) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad i > j。$$

回顾定理 3.2证明了类型为 A、C、D 的 Schur 代数是相应典型群和相似群的广义 Schur 代数。由文献 [26, 28]，广义 Schur 代数都是整性拟遗传代数。

推论 4.1: 在类型为 A_m（$m \geqslant 1$）、C_m（$m \geqslant 2$）和 D_m（$m \geqslant 4$）时， Schur 代数 $S^X(n,r)$（$r \geqslant 0$）是整性拟遗传代数，其单模同构类的指标集为在支配序下的权集 $\pi^X(n,r)$ 或者 $\pi_0^X(n,r)$。

视 $\lambda \in \pi^X(n,r)$ 时， Schur 代数 $S^X(n,r)$ 的标准模 $\Delta(\lambda)$ 是相应典型群 G 的 Weyl 模 $W(\lambda)$；视 $\lambda \in \pi_0^X(n,r)$时，$\Delta(\lambda)$ 是相应相似群 G^0 的 Weyl 模 $W(\lambda)$。

命题 4.4: 在类型为 A_m（$m \geqslant 1$）、C_m（$m \geqslant 2$）和 D_m（$m \geqslant 4$）时，对任意非负整数 $r \geqslant 0$，Schur 代数之间的满射

$$(\cdot\mathrm{det})^* : S^X(n, r+n) \longrightarrow S^X(n,r)$$

和

$$(\cdot c_0)^* : S^X(n, r+2) \longrightarrow S^X(n,r)$$

与 Schur 代数的拟遗传结构相容，即映射 $(\cdot\mathrm{det})^*$ 和 $(\cdot c_0)^*$ 的核是相应 Schur 代数的某个遗传链中的理想。

证明: 任意固定一个如题意要求的类型和任一非负整数 r，我们来证明满射

$$(\cdot\mathrm{det})^* : S^X(n, r+n) \longrightarrow S^X(n,r)$$

的核是 Schur 代数 $S^X(n, r+n)$ 的遗传链中的理想。对于满射 $(\cdot c_0)^*$ 的情形可以类似证得。

根据引理 2.7和推论 3.2，我们可视模范畴 $mod(S^X(n,r))$ 为典型群 G 上有理表示范畴的满子范畴。作为自己的正则模，同时作为群代数 KG 上的模，Schur 代数 $S^X(n,r)$ 的单合成因子的最高权恰为权集 $\pi^X(n,r)$。根据引理 4.5中的第一

个交换图表，Schur 代数 $S^X(n,r)$ 是 KG-有理表示 $S^X(n,r+n)$ 的属于 $\pi^X(n,r)$ 的商表示。

根据命题 4.2（2），映射 $(\cdot\mathrm{det})^*$ 诱导了从范畴 $mod(S^X(n,r))$ 到范畴 $mod(S^X(n,r{+}n))$ 的满子嵌入，也记为 $(\cdot\mathrm{det})^*$。注意到相似群的一维表示 K_{det} 限制到典型群 G 上是平凡表示，因此对 $\lambda\in\pi^X(n,r)$，由引理 4.3知，函子 $(\cdot\mathrm{det})^*$ 把 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 的标准模 $\Delta(\lambda)$映为 Schur 代数 $S^X(n,r+n)$ 的标准模 $\Delta(\lambda)$；并且把 $S^X(n,r)$ 的正则模 $S^X(n,r)$ 映为 $S^X(n,r)\in mod(S^X(n,r+n))$，二者都有以标准模 $\Delta(\lambda)$ 为截面的滤，其中 $\lambda\in\pi^X(n,r)$。

注意到权集 $\pi^X(n,r)$ 是权集 $\pi^X(n,r+n)$ 的饱和子集。我们暂时简记 $S\triangleq S^X(n,r{+}n)$，令 e 为 S 的 λ 取遍 $\pi^X(n,r{+}n)\backslash\pi^X(n,r)$ 的本原幂等元 e_λ的和。根据代数 S 的拟遗传结构，由 e 生成的理想 SeS 属于映射$(\cdot\mathrm{det})^*: S\longrightarrow S^X(n,r)$ 的核。另外当基域 $K=\mathbb{C}$ 时，Schur 代数是半单的（推论 3.4），并且此时拟遗传链的截面恰为 $\Delta(\lambda)^{\oplus d_\lambda}$，其中 $d_\lambda=\mathrm{dim}\Delta(\lambda)$ 为该标准模（此时也是单模）的维数。因此

$$\mathrm{dim}_{\mathbb{C}}(S/SeS)=\sum_{\lambda\in\pi^X(n,r)}d_\lambda^2。$$

而因为 Schur 代数是整性拟遗传的，商代数的维数 $\mathrm{dim}(S/SeS)$ 不依赖于基域 K 的选取，并且根据推论 3.6等于 $\mathrm{dim}S^X(n,r)$。综上所述我们有 $\mathrm{Ker}((\cdot\mathrm{det})^*)=SeS$，这是 S 的某一遗传链中的理想。 ■

设 λ 和 μ 是相似群 G^0 的支配权，按通常的记号，我们记 $[\lambda:\mu]$ 为 G^0 上单模 $L(\mu)$ 在 Weyl 模 $W(\lambda)$ 中的重数。则我们有如下的列移动定理（James' Column Removal Theorem），这是推广了 James [58]对一般线性群的结果。其中 $\lambda_0=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n$ 和 $\varepsilon_0=\varepsilon_1+\varepsilon_n$。

推论 4.2: 任给支配权 λ 和 $\mu\in\pi_0^X(n,r)$，在类型为 A、C、D 时，在相似群 G^0 上我们有

$$[\lambda:\mu]=[\lambda+\lambda_0:\mu+\lambda_0]。$$

进而在类型为 C、D 时，我们还有

$$[\lambda:\mu]=[\lambda+\varepsilon_0:\mu+\varepsilon_0]。$$

证明: 对于支配权 λ 和 $\mu \in \pi_0^X(n,r)$，相似群 G^0 上的单模 $L(\mu)$ 在 Weyl 模 $W(\lambda)$ 中的重数等于 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 上的单模 $L(\mu)$ 在标准模 $\Delta(\lambda)$ 中的重数。根据命题 4.4，范畴的嵌入

$$(\cdot\mathrm{det})^* : M^X(n,r) \longrightarrow M^X(n,r+n)$$

和

$$(\cdot c_0)^* : M^X(n,r) \longrightarrow M^X(n,r+2)$$

保持单模在 Weyl 模中的重数，结论得证。 ■

应该指出的是，这一结论是 Donkin [59, pp. 232]中推论2的特殊情形，其中对所有的约化代数群证明了类似的结论。

第 5 章　关于若干典型群和正交群的 Schur 代数的计算

本章旨在计算一些参数 n、r 比较小时 Schur 代数 $S^X(n,r)$的结构。具体来说，5.1节将仅限于复数域 $\mathbb{C}$ 计算 $SL_2(\mathbb{C})$、$SP_2(\mathbb{C})$、$SO_3(\mathbb{C})$ 和 $SO_2(\mathbb{C})$、$O_2(\mathbb{C})$ 的 Schur 代数，以及当 $r=2$ 时的 Schur 代数 $S^X(n,2)$。5.2节将在特征不等于 2 的代数封闭域 K 上计算 $SO_2(K)$、$O_2(K)$ 的 Schur 代数，并比较 $SP_2(K)$、$SO_3(K)$ 和 $SL_2(K)$ 的 Schur 代数。5.3节将证明一种特殊情形下（即参数 $r=2$ 时）正交群 $O_n(K)$、辛群 $SP_n(K)$ 和 Brauer 代数之间的 Schur–Weyl 对偶（见定理 5.1），并且作为副产品得到 $S^X(n,2)$（$X=B$、C、D）的结构和一些关于分解数的信息（推论 5.1）。

5.1 若干 Schur 代数的结构（基域 $\mathbb{C}$）

本节将计算复数域 $\mathbb{C}$ 上的若干 Schur 代数，主要结果为命题 5.1和命题 5.2。回顾当基域为 $\mathbb{C}$ 时，Schur 代数 $S^X(n,r)$ 定义为表示映射

$$\mathbb{C}G \longrightarrow End_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^n)^{\otimes r})$$

或者

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow End_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^n)^{\otimes r})$$

的像，其中 G 和 $\mathfrak{g}$ 分别为 X_m 型的典型群和典型李代数，$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 为泛包络代数。由推论 3.4知，此时 Schur 代数都是半单的，且

$$S^X(n,r) \cong \sum_{\lambda\in\pi^X(n,r)} \mathcal{M}_{d_\lambda}(\mathbb{C}),$$

其中 $\pi^X(n,r)$ 为 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 在 G（或者 $\mathfrak{g}$）上的单合成因子的最高权的集合，d_λ 为最高权为 λ 的既约表示的维数。文中关于 $\varepsilon_i\in\mathfrak{h}^*$ 的定义见 2.1节。

例 5.1: 在类型为 $A_{m=1}$ 时，典型李代数为 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$，典型群为 $SL_2(\mathbb{C})$。根据定理

3.1，对任意非负整数 $r \geqslant 0$，

$$\pi^A(2,r) = \bigcup_{i \geqslant 0} \Lambda^+(1, r-2i) = \{r\varepsilon_1,\ (r-2)\varepsilon_1, \dots, (r-2\lfloor\frac{r}{2}\rfloor)\varepsilon_1\},$$

其中 $\lfloor\frac{r}{2}\rfloor$ 是小于等于 $\frac{r}{2}$ 的最大整数。此时 $\forall\, l \geqslant 0$，李代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的最高权为 $l\varepsilon_1$ 的既约表示的维数为 $d_{l\varepsilon_1} = l+1$（见 [49, pp. 33]）。因此Schur代数为

$$S^A(2,r) \cong \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathcal{M}_{r+1-2i}(\mathbb{C}),$$

其中我们约定若 $l \leqslant 0$，则 $\mathcal{M}_l(\mathbb{C}) = \emptyset$ 为空集。 ■

例 5.2: 设矩阵

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

辛李代数

$$\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : M^{tr}J' + J'M = 0\}$$

可以被视为是类型为 $C_{m=1}$ 的典型李代数。注意对矩阵 $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$，条件 $MJ' + J'M = 0$ 等价与 $tr(M) = 0$，因此李代数 $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$，并且对任意非负整数 $r \geqslant 0$，Schur 代数$S^C(2,r) = S^A(2,r)$。 ■

例 5.3: 设矩阵

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

特殊正交李代数

$$\mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) : M^{tr}J + JM = 0,\ tr(M) = 0\}$$

可以被视为是类型为 $B_{m=1}$ 的典型李代数，它只有一个正根 ε_1。当 $r = 1$ 时，因为 $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ 的标准表示 $\mathbb{C}^3$ 是一个最高权为 ε_1 的不可约表示，故权集 $\pi^B(3,1) = \{\varepsilon_1\}$。它不是支配权集 $\Lambda^+(B_1)$ 的饱和子集，因为在支配序下支配权 0 比 ε_1 小，但是 0 不属于 $\pi^B(3,1)$。当 $r \geqslant 2$时，我们将证明 Schur 代数 $S^B(3,r)$ 同构于 A_1 型 Schur 代数 $S^A(2,2r)$，特别的由定理 3.2知这是一个广义 Schur 代

数。

李代数 $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ 有唯一的单根 ε_1 和唯一的支配权 $\frac{\varepsilon_1}{2}$，其标准表示 $\mathbb{C}^3$ 的最高权为 ε_1。当 $r \geqslant 2$ 时，由与定理 3.1类似的计算可以得到

$$\pi^B(3,r) = \{r\varepsilon_1,\, (r-1)\varepsilon_1,\, \ldots,\, \varepsilon_1,\, 0\}。$$

另一方面，李代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 有唯一的单根 $2\varepsilon_1$ 和唯一的支配权 ε_1，通过李代数的同构 $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$，$\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ 的标准表示 $\mathbb{C}^3$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的最高权为 $2\varepsilon_1$ 的不可约表示。当 $r \geqslant 2$ 时，由定理 3.1知

$$\pi^A(2,2r) = \{2r\varepsilon_1,\, 2(r-1)\varepsilon_1,\, \ldots,\, 2\varepsilon_1,\, 0\}。$$

由上述分析可得 $\mathbb{C}$-代数同构 $S^B(3,r) \cong S^A(2,2r)$，$\forall\, r \geqslant 2$。 ■

根据定理 3.1，当正整数 $m \geqslant 2$（在类型为 D 时要求 $m \geqslant 4$）时，

$$\pi^A(n,2) = \{2\varepsilon_1,\, \varepsilon_1+\varepsilon_2\},$$

$$\pi^X(n,2) = \{2\varepsilon_1,\, \varepsilon_2+\varepsilon_2,\, 0\}, \quad X = B, C, D。$$

下面的引理计算了当 $\lambda \in \pi^X(n,2)$ 时，典型李代数的最高权为 λ 的既约表示 $V(\lambda)$ 的维数 d_λ。

引理 5.1: 当类型为 A_m（$m \geqslant 2$）时，

$$d_{2\varepsilon_1} = \frac{n^2+n}{2}, \qquad d_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \frac{n^2-n}{2}。$$

当类型为 B_m（$m \geqslant 2$）和 D_m（$m \geqslant 4$）时，

$$d_{2\varepsilon_1} = \frac{n^2+n}{2} - 1, \quad d_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \frac{n^2-n}{2}, \quad d_0 = 1。$$

当类型为 C_m（$m \geqslant 2$）时，

$$d_{2\varepsilon_1} = \frac{n^2+n}{2}, \quad d_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \frac{n^2-n}{2} - 1, \quad d_0 = 1。$$

由该引理和推论 3.4可得：

命题 5.1: 设正整数 m 如引理 5.1要求，则复数域上的 Schur 代数为

$$\begin{aligned} S^A(n,2) &\cong \mathcal{M}_{\frac{n^2+n}{2}}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{\frac{n^2-n}{2}}(\mathbb{C}), \\ S^X(n,2) &\cong \mathcal{M}_{\frac{n^2+n}{2}-1}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{\frac{n^2-n}{2}}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}, \quad X = B \text{ 和 } D, \\ S^C(n,2) &\cong \mathcal{M}_{\frac{n^2+n}{2}}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{\frac{n^2-n}{2}-1}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}。 \end{aligned}$$

特别的，我们有维数公式：

$$\begin{aligned} \dim S^A(n,2) &= \frac{n^2(n^2+1)}{2}, \\ \dim S^X(n,2) &= \frac{n^2(n^2+1)}{2} - (n+2)(n-1), \quad X = B \text{ 和 } D, \\ \dim S^C(n,2) &= \frac{n^2(n^2+1)}{2} - (n-2)(n+1)。 \end{aligned}$$

现在我们给出引理 5.1的证明。

证明: （引理 5.1的证明）对于类型为 X_m（其中 m 如题意要求）的典型李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个支配权 λ，Weyl 特征标公式（见）[49, pp. 139]给出

$$d_\lambda = \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\check{\alpha}, \lambda+\rho\rangle}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\check{\alpha}, \rho\rangle},$$

其中 Φ^+ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的的正根集，$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha \in \mathfrak{h}^*$ 是 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 上的线性函数，$\langle h, \lambda\rangle$ 是 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 在 $h \in \mathfrak{h}$ 上的取值，并且 $\check{\alpha} \in \mathfrak{h}$ 是相应于正根 α 的余根（即满足 $\langle\check{\alpha}, \alpha\rangle = 2$ 的元素）。注意到当 $r = 2$ 时张量积 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2}$ 中的单直和项的重数始终为 1，因此

$$n^2 = \sum_{\lambda\in\pi^X(n,2)} d_\lambda。$$

下面我们来逐一地证明引理中的公式。

当类型为 A_m（$m \geqslant 2$）时，$n = m+1$，李代数 $\mathfrak{sl}_{m+1}(\mathbb{C})$ 的正根集为

$$\Phi^+(A_m) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j :\ 1 \leqslant i < j \leqslant m+1\},$$

并且

$$\rho=\frac{1}{2}(m\varepsilon_1+(m-2)\varepsilon_2+\cdots+(-m)\varepsilon_{m+1})。$$

对任意 $i<j$，有

$$\langle(\varepsilon_i\check{-}\varepsilon_j),\rho\rangle=j-i。$$

我们定义正根 $\varepsilon_i-\varepsilon_j$ 的长度为 $j-i$，则对于$1\leqslant i\leqslant n-1$，共有 $n-i$ 个正根长度为 i。对任意 $1\leqslant i<j\leqslant m+1$，$\langle(\varepsilon_i\check{-}\varepsilon_j),\varepsilon_1\rangle\neq 0$ 当且仅当 $i=1$，并且此时 $\langle(\varepsilon_1\check{-}\varepsilon_j),\varepsilon_1\rangle=1$。因此

$$\begin{aligned}
d_{2\varepsilon_1} &= \frac{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\check{\alpha},2\varepsilon_1+\rho\rangle}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\check{\alpha},\rho\rangle}\\
&= \frac{3\cdot 1^{n-2}\cdot 4\cdot 2^{n-3}\cdot 5\cdot 3^{n-4}\cdots n\cdot(n-2)^1\cdot(n+1)^1}{1^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot 3^{n-3}\cdots(n-2)^2\cdot(n-1)^1}\\
&= \frac{n(n+1)}{2}。
\end{aligned}$$

利用

$$n^2=\sum_{\lambda\in\pi^A(n,2)}d_\lambda=d_{2\varepsilon_1}+d_{\varepsilon_1+\varepsilon_2},$$

可得

$$d_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}=n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}。$$

当类型为 B_m（$m\geqslant 2$）时，$n=2m+1$，李代数 $\mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})$ 的正根集为

$$\Phi^+(B_m)=\{\varepsilon_i\pm\varepsilon_j:1\leqslant i<j\leqslant m\}\cup\{\varepsilon_i:1\leqslant i\leqslant m\},$$

并且

$$\rho=\frac{1}{2}((2m-1)\varepsilon_1+(2m-3)\varepsilon_2+\cdots+3\varepsilon_{m-1}+\varepsilon_m)。$$

对于一个正根 α，$\langle\check{\alpha},\varepsilon_1\rangle\neq 0$ 当且仅当 $\alpha=\varepsilon_1$ 或者 $\varepsilon_1\pm\varepsilon_j$（$j=2,3,\ldots,m$），并且此时 $\langle\check{\alpha},\varepsilon_1\rangle=1$。注意到 $\langle\check{\varepsilon_1},\rho\rangle=(2m-1)/2$，$\langle(\varepsilon_1\check{-}\varepsilon_j),\rho\rangle=j-1$，$\langle(\varepsilon_1\check{+}\varepsilon_j),\rho\rangle=j+m-2$，我们有

$$d_{2\varepsilon_1}=\frac{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\check{\alpha},2\varepsilon_1+\rho\rangle}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\check{\alpha},\rho\rangle}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdots(2m-1)\cdot(2m)\cdot(2m+3)/2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2m-3)\cdot(2m-2)\cdot(2m-1)/2} \\
&= m(2m+3) = \frac{n(n+1)}{2} - 1。
\end{aligned}
$$

因为最高权为 0 的不可约表示是平凡表示 $\mathbb{C}$，故其维数 $d_0 = 1$。再根据 $n^2 = \sum_{\lambda\in\pi^B(n,2)} d_\lambda = d_{2\varepsilon_1} + d_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + d_0$，我们有

$$
d_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = n^2 - 1 - (\frac{n(n+1)}{2} - 1) = \frac{n(n-1)}{2}。
$$

当类型为 C 和 D 时，维数公式可由类似的计算得到。 ■

任给一个线性代数群 G（即一般线性群 $GL_n(\mathbb{C})$ 的闭子群），我们都可以按照与典型群类似的方法定义其 Schur 代数。此时 G 的标准表示为 $\mathbb{C}^n$，且对任意正整数 $r\geqslant 1$，G 对角作用在张量积空间 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes r}$ 上，相应的 Schur 代数 $S^G(n,r)$ 就定义为表示映射

$$
\mathbb{C}G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^n)^{\otimes r})
$$

的像集。当 $r=0$ 时，约定 $S^G(n,0)=\mathbb{C}$。

现在来考虑特殊正交群

$$
\begin{aligned}
SO_2(\mathbb{C}) &= \{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : M^{tr}JM = J = MJM^{tr},\ \det(M)=1\} \\
&= \{M_a \triangleq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} : a\in\mathbb{C}^*\}
\end{aligned}
$$

和正交群

$$
\begin{aligned}
O_2(\mathbb{C}) &= \{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : M^{tr}JM = J = MJM^{tr}\}, \\
&= \{M_a \triangleq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix},\ N_a \triangleq \begin{pmatrix} 0 & a \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} : a\in\mathbb{C}^*\},
\end{aligned}
$$

其中矩阵

$$J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}。$$

它们都是一般线性群 $GL_2(\mathbb{C})$ 的子群，其中特殊正交群 $SO_2(\mathbb{C})$ 可以被视为是类型为 D_1 的典型群。对任意正整数 $r\geqslant 1$，分别记 $S^D(2,r)$ 和 $S^{D'}(2,r)$ 为相应于 $SO_2(\mathbb{C})$ 和 $O_2(\mathbb{C})$ 的 Schur 代数。由定义可知，$S^D(2,r)$ 和 $S^{D'}(2,r)$ 都是 $SL_2(\mathbb{C})$的 Schur 代数 $S^A(2,r)$ 的子代数。

按照 J. A. Green [2]的记号，我们令

$$I(2,r)=\{(i_1,i_2,\ldots,i_r):i_1,\ldots,i_r=1\text{ 或者 }2\},$$

对称群 Σ_r 通过位置交换右作用在集合 $I(2,r)$ 和 $I(2,r)\times I(2,r)$ 上，即 $\forall\sigma\in\Sigma_r$，$\underline{i}=(i_1,i_2,\ldots,i_r)$，$\underline{j}=(j_1,j_2,\ldots,j_r)\in I(2,r)$，

$$\underline{i}\sigma=(i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},\ldots,i_{\sigma(r)}),\quad(\underline{i},\underline{j})\sigma=(\underline{i}\sigma,\underline{j}\sigma)。$$

记 $\Omega^2(2,r)$ 为集合 $I(2,r)\times I(2,r)$ 在对称群 Σ_r 作用下的轨道代表元的集合。

例如，当 $r=1$ 时，$I(2,1)=\{1,2\}$，

$$\Omega^2(2,1)=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}。$$

当 $r=2$ 时，$I(2,2)=\{(11),(12),(21),(22)\}$，

$$\begin{aligned}\Omega^2(2,2)\;=\;&\{(11,11),(11,12),(11,22),(12,11),(12,12),\\&(12,21),(12,22),(22,11),(22,12),(22,22)\}。\end{aligned}$$

对 $(\underline{i},\underline{j})\in\Omega^2(2,r)$，令

$$c_{\underline{i},\underline{j}}=c_{i_1,j_1}c_{i_2,j_2}\cdots c_{i_r,j_r}\in\mathbb{C}[c_{11},c_{12},c_{21},c_{22}]_r,$$

这是一个 r 次齐次多项式。例如当 $r=2$ 时，$c_{11,11}=c_{11}^2$，$c_{11,12}=c_{11}c_{12}=c_{12}c_{11}=c_{11,21}$，事实上 $(11,12)$ 和 $(11,21)\in I(2,2)\times I(2,2)$ 在同一个 Σ_2 轨道

中。则余代数 $\mathbb{C}[c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}]_r$ 有整基 $\{c_{\underline{i},\underline{j}} : (\underline{i}, \underline{j}) \in \Omega^2(2, r)\}$，对偶的，Schur 代数 $S^A(2, r)$有整基

$$\{\xi_{\underline{i}\underline{j}} = (c_{\underline{i},\underline{j}})^* : \ (\underline{i}, \underline{j}) \in \Omega^2(2, r)\}。$$

对任意正整数 a, b，我们记 $1^a2^b = (1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2) \in I(2, a + b)$，其中有 a 个 1 和 b 个 2。

命题 5.2: 设 $r \geqslant 1$ 是一个正整数。

（1）作为 Schur 代数 $S^A(2, r)$ 的子代数，$S^D(2, r)$有 $\mathbb{C}$-基

$$\{\xi_{1^{r-i}2^i, 1^{r-i}2^i} : \ i = 0, 1, \ldots, r\}。$$

作为一个 $\mathbb{C}$-代数，$S^D(2, r)$ 同构于 $\mathbb{C}^{\oplus(r+1)}$。特别的，dim$S^D(2, r) = r + 1$。

（2）作为 $S^A(2, r)$ 的子代数，$S^{D'}(2, r)$ 有 $\mathbb{C}$ 基

$$\{\xi_{1^{r-i}2^i, 1^{r-i}2^i}, \ \xi_{1^{r-i}2^i, 2^{r-i}1^i} : \ i = 0, 1, \ldots, r\}。$$

作为一个 $\mathbb{C}$-代数，

$$S^{D'}(2, r) \cong \begin{cases} (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))^{\oplus \frac{r+1}{2}} & \text{如果 } r \text{ 是奇数；} \\ (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))^{\oplus \frac{r}{2}} \oplus \mathbb{C}^{\oplus 2} & \text{如果 } r \text{ 是偶数。} \end{cases}$$

特别地，dim$S^{D'}(2, r) = 2(r + 1)$。

证明: 设 $\{v_1, v_2\}$ 是线性空间 $\mathbb{C}^2$ 的标准基。当 $r \geqslant 1$ 时，对于 $\underline{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in I(2, r)$，我们记 $v_{\underline{i}} = v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}$，则 $\{v_{\underline{i}} : \underline{i} \in I(2, r)\}$ 是张量积空间 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes r}$ 的一组基。对于 $\underline{i}$, $\underline{j} \in I(2, r)$，我们记 $E_{\underline{i},\underline{j}}$ 为 End$_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^2)^{\otimes r})$ 中把 $v_{\underline{j}}$ 映到 $v_{\underline{i}}$，把 $v_{\underline{k}}$ （$\underline{k} \neq \underline{j}$ 时）映到零的元素。视 Schur 代数 $S^A(2, r)$ 为 End$_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^2)^{\otimes r})$ 的子代数时，根据文献 [2, pp. 29]，

$$\xi_{\underline{i},\underline{j}} = \sum_{\sigma} E_{\underline{i}\sigma,\underline{j}\sigma},$$

其中 $\sum_\sigma$ 对那些使得 $(\underline{i}\sigma, \underline{j}\sigma)$ 互不相等的 $\sigma \in \Sigma_r$ 求和。例如，当 $r = 1$ 时，

对任意 $i,j \in I(2,1)=\{1,2\}$，$\xi_{ij}=E_{ij}$。当 $r=2$ 时，$\xi_{11,11}=E_{11,11}$，$\xi_{11,12}=E_{11,12}+E_{11,21}$，$\xi_{12,12}=E_{12,12}+E_{21,21}$，$\xi_{12,21}=E_{12,21}+E_{21,12}$。

我们记特殊正交群 $SO_2(\mathbb{C})$ 的标准表示的表示映射为

$$\rho:\mathbb{C}SO_2(\mathbb{C})\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2),$$

它把矩阵 $M\in SO_2(\mathbb{C})$ 映到自身。对于正整数 $r\geqslant 1$，r 次张量积的表示映射

$$\rho^r:\mathbb{C}SO_2(\mathbb{C})\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^2)^{\otimes r})$$

把矩阵 $M\in SO_2(\mathbb{C})$ 映为 M 的 r 次张量积矩阵 $M^{\otimes r}$。该表示映射经过 $S^A(2,r)$ 分解，并且其像集为 $S^D(2,r)$。

通过对正整数 r 做归纳，不难证明对任意非零复数 $a\in\mathbb{C}^*$，

$$\rho^r(M_a)=(M_a)^{\otimes r}=\sum_{i=0}^{r}a^{r-2i}\xi_{1^{r-i}2^i,1^{r-i}2^i}\in S^A(2,r)。$$

注意到等式右端的元素 $\xi_{1^{r-i}2^i,1^{r-i}2^i}$（$i=0,1,\ldots,r$）是 Schur代数 $S^A(2,r)$ 中两两相互正交的幂等元，因此对正整数 $s\geqslant 1$，有

$$(M_a^{\otimes r})^s=\sum_{i=0}^{r}a^{(r-2i)s}\xi_{1^{r-i}2^i,1^{r-i}2^i}\in S^A(2,r)。$$

由于 $S^D(2,r)$ 是 $S^A(2,r)$ 的由 $\rho^r(M_a)$（$a\in\mathbb{C}^*$）生成的子代数，所以 $(M_a^{\otimes r})^s$（$a\in\mathbb{C}^*$，$s\geqslant 1$）属于 $S^D(2,r)$。对于不同的 $i\in\{0,1,\ldots,r\}$，$r-2i$ 两两互异，因此存在 $a_0\in\mathbb{C}^*$ 使得 a_0^{r-2i} 两两互异。这样通过求解一个 Vandermonde 矩阵，$\xi_{1^{r-i}2^i,1^{r-i}2^i}$（$i=0,1,\ldots,r$）可以表达成 $(M_{a_0}^{\otimes r})^s$（$s=0,1,\ldots,r$）的线性组合，因此属于代数 $S^D(2,r)$。另一方面，以 $\{\xi_{1^{r-i}2^i,1^{r-i}2^i}:i=0,1,\ldots,r\}$ 为一组基的 $S^A(2,r)$ 的线性子空间实际上已经是一个子代数，因此它就是 $S^D(2,r)$。

对正交群 $O_2(\mathbb{C})$ 我们进行类似的计算。对正整数 $r\geqslant 1$，记其表示映射为

$$\varrho^r:\mathbb{C}O_2(\mathbb{C})\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^2)^{\otimes r}),$$

则 $\forall\, a \in \mathbb{C}^*$，

$$\varrho^r(M_a) = (M_a)^{\otimes r} = \sum_{i=0}^{r} a^{r-2i}\xi_{1^{r-i}2^i,1^{r-i}2^i} \in S^A(2,r),$$

$$\varrho^r(N_a) = (N_a)^{\otimes r} = \sum_{i=0}^{r} a^{r-2i}\xi_{1^{r-i}2^i,2^{r-i}1^i} \in S^A(2,r)。$$

Schur 代数 $S^{D'}(2,r)$ 是 $S^A(2,r)$ 的由 $M_a^{\otimes r}$ 和 $N_a^{\otimes r}$（$a \in \mathbb{C}^*$）生成的子代数。由前面的计算可知，对于 $i = 0, 1, \ldots, r$，元素 $\xi_{1^{r-i}2^i,1^{r-i}2^i}$ 属于 $S^{D'}(2,r)$；从而 $\xi_{1^{r-i}2^i,1^{r-i}2^i}$ 与 $\varrho^r(N_a)$ 的乘积 $\xi_{1^{r-i}2^i,2^{r-i}1^i}$ 也属于 $S^{D'}(2,r)$。而以

$$\{\xi_{1^{r-i}2^i,1^{r-i}2^i},\ \xi_{1^{r-i}2^i,2^{r-i}1^i} :\ i = 0, 1, \ldots, r\}$$

为一组基的线性子空间对 $S^A(2,r)$ 的乘法封闭，因此它就是代数 $S^{D'}(2,r)$.

最后，Schur 代数 $S^D(2,r)$ 和 $S^{D'}(2,r)$ 的代数结构由这些基立得。 ■

5.2 若干 Schur 代数的结构（基域 K）

本节中基域为特征不等于 2 的代数封闭域 K。我们将计算 $SO_2(K)$ 和 $O_2(K)$ 的 Schur 代数，并比较$SP_2(K)$、$SO_3(K)$ 和 $SL_2(K)$ 的 Schur 代数，它们是上一节中例 5.2、例 5.3和命题 5.2的推广。

例 5.4: 代数群

$$SP_2(K) = \{M \in \mathcal{M}_2(K) : M^{tr}J'M = J' = MJ'M^{tr}\}$$

可以被视为是类型为 C_1 的典型群，其中矩阵

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}。$$

注意到对矩阵 $M \in \mathcal{M}_2(K)$，$M^{tr}J'M = J' = MJ'M^{tr}$ 当且仅当 $\det(M) = 1$，所以辛群 $SP_2(K)$ 就是一般线性群 $SL_2(K)$。特别的，对任意非负整数 $r \geqslant 0$，有$S^C(2,r) = S^A(2,r)$。 ■

例 5.5: 特殊正交群

$$SO_2(K)=\{M\in\mathcal{M}_2(K): M^{tr}JM=J=MJM^{tr}，\det(M)=1\}$$

可以被视为是类型为 D_1 的典型群，其中矩阵

$$J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}。$$

代数群 $SO_2(K)$ 的仿射坐标环为 $K[SO_2(K)]=K[c_{11},c_{12},c_{21},c_{22}]/I(SO_2(K))$，其中理想 $I(SO_2(K))$ 由

$$\{c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}-1,\ c_{11}c_{22}+c_{12}c_{21}-1,\ 2c_{11}c_{12},\ 2c_{21}c_{22},\ 2c_{11}c_{21},\ 2c_{12}c_{22}\}$$

生成。由此可得齐次理想

$$I(SO_2)^0\triangleq\bigoplus_{r\geqslant 0}(K[c_{ij}]_r\cap I(SO_2(K))^0=\langle c_{12},c_{21}\rangle，$$

及余代数

$$K[SO_2(K)]^0\triangleq K[c_{ij}]/I(SO_2(K))^0=K[c_{ij}]/\langle c_{12},c_{21}\rangle\cong K[c_{11},c_{22}]，$$

并且对非负整数 $r\geqslant 0$，齐次部分 $K[SO_2]_r^0$ 有整基 $\{c_{11}^i c_{22}^{r-i}: i=0,1,\ldots,r\}$。因为 $SO_2(K)$ 的 Schur 代数 $S^D(2,r)$ 同构于 $(K[SO_2]_r^0)^*$（根据推论 3.1），因此有对偶整基

$$\{\xi_{1^i2^{r-i},1^i2^{r-i}}=(c_{11}^i c_{22}^{r-i})^*: i=0,1,\ldots,r\}。$$

由此可得，$S^D(2,r)$ 是 $S^A(2,r)$ 的同构于 $K^{\oplus(r+1)}$ 的半单子代数。 ■

例 5.6: 特殊正交群

$$SO_3(K)=\{M\in\mathcal{M}_3(K): M^{tr}JM=J=MJM^{tr}，\det(M)=1\}$$

可以被视为是类型为 B_1 的典型群，其中矩阵

$$J=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}。$$

当 $r=0$ 时，Schur 代数 $S^B(3,0)=K$；当 $r=1$ 时，Schur 代数 $S^B(n,1)=\mathcal{M}_3(K)$。我们将证明对任意正整数 $r\geqslant 2$，Schur 代数 $S^B(3,r)$ 同构于 $S^A(2,2r)$。根据例 5.3，这两个代数在复数域 $\mathbb{C}$ 上同构，因此它们有相等的维数。下面我们来构造它们的线性对偶 $K\langle SO_3^0(K)\rangle_r$ 和 $K\langle GL_2(K)\rangle_{2r}$ 之间的作为余代数的满射，从而两个 Schur 代数同构。

特殊正交群 $SO_3(K)$ 的相似群为

$$SO_3^0(K)=\{M\in\mathcal{M}_3(K):M^{tr}JM=sJ=MJM^{tr},\ \mathrm{det}(M)=t,\ t,s\in K^*\}。$$

余代数 $K\langle SO_3^0(K)\rangle=K[c_{ij}]_{i,j=1,2,3}/I\langle SO_3^0(K)\rangle$，其中理想 $I\langle SO_3^0(K)\rangle$ 由如下的二次关系生成：

$$\{c_1(i,j),\ c_2(i,j):\ \forall\, j\neq i'\}\cup\{c_1(i,i')-c_1(1,3),\ c_2(j,j')-c_1(1,3):\ \forall\, i,j\},$$

其中 $i'=4-i$，这些关系形如：$c_1(1,1)=2c_{31}c_{11}+c_{21}^2$，$c_1(1,2)=c_{31}c_{12}+c_{21}c_{22}+c_{11}c_{32}$，$c_2(1,1)=2c_{13}c_{11}+c_{12}^2$，$c_2(2,1)=c_{32}c_{11}+c_{22}c_{21}+c_{12}c_{31}$，$c_1(2,2)-c_1(1,3)=c_{12}c_{32}+c_{22}c_{22}+c_{32}c_{12}-c_{11}c_{33}-c_{21}c_{23}-c_{31}c_{13}$ 等。为了与相似群 $SO_3^0(K)$ 区分开来，我们记 $\{d_{ij}\}_{i,j=1,2}$ 为特殊线性群 $GL_2(K)$ 的坐标函数，这样 $K\langle GL_2(K)\rangle=K[d_{ij}]_{i,j=1,2}$。

把矩阵

$$\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}$$

的每个分量映到矩阵

$$\begin{pmatrix}d_{11}^2&-\sqrt{2}d_{11}d_{12}&-d_{12}^2\\-\sqrt{2}d_{11}d_{21}&d_{11}d_{22}+d_{12}d_{21}&\sqrt{2}d_{12}d_{22}\\-d_{21}^2&\sqrt{2}d_{21}d_{22}&d_{22}^2\end{pmatrix}$$

的相应分量，我们就得到一个从 $K[c_{ij}]_1$ 到 $K[d_{ij}]_2$ 的线性映射，记为 ϕ。事实上不难验证 ϕ 是一个余代数映射，即 $\Delta(\phi(c_{ij}))=\phi(\Delta(c_{ij}))$，对任意 $i,j=1,2,3$。以 $i=j=1$ 为例：

$$\begin{aligned}
\Delta(\phi(c_{11})) &= \Delta(d_{11}^2)=(\Delta(d_{11}))^2=(d_{11}\otimes d_{11}+d_{12}\otimes d_{21})^2\\
&= d_{11}^2\otimes d_{11}^2+2d_{11}d_{12}\otimes d_{11}d_{21}+d_{12}^2\otimes d_{21}^2,\\
\phi(\Delta(c_{11})) &= \phi(c_{11}\otimes c_{11}+c_{12}\otimes c_{21}+c_{13}\otimes c_{31})\\
&= \phi(c_{11})\otimes\phi(c_{11})+\phi(c_{12})\otimes\phi(c_{21})+\phi(c_{13})\otimes\phi(c_{31})\\
&= d_{11}^2\otimes d_{11}^2+(-\sqrt{2}d_{11}c_{12})\otimes(-\sqrt{2}d_{11}d_{21})+d_{12}^2\otimes d_{21}^2\\
&= d_{11}^2\otimes d_{11}^2+2d_{11}d_{12}\otimes d_{11}d_{21}+d_{12}^2\otimes d_{21}^2。
\end{aligned}$$

对任意 c_1,$c_2\in K[c_{ij}]_1$，通过定义 $\phi^2(c_1c_2)=\phi(c_1)\phi(c_2)$，我们可以将余代数映射 $\phi: K[c_{ij}]_1\longrightarrow K[d_{ij}]_2$ 延拓为余代数映射 $\phi^2: K[c_{ij}]_2\longrightarrow K[d_{ij}]_4$。断言：映射 ϕ^2 是满射。

余代数 $K[d_{ij}]_4$ 中的单项式 d 都是乘积 d_1d_2 的形式，其中 $d_1=d_{i_1j_1}d_{i_2j_2}$，$d_2=d_{k_1l_1}d_{k_2l_2}$ 是 2 次齐次单项式。如果 $d_1=d_{11}d_{22}$，并且 $d_2=d_{11}^2$，则 $d_1d_2=\phi^2(c_{11}c_{22}-\frac{1}{2}c_{12}c_{21})$ 落在像集 $\mathrm{Im}(\phi^2)$ 中。如果 $d_1=d_{11}d_{22}$，并且 $d_2=d_{22}^2$，则 $d_1d_2=\phi^2(c_{22}c_{33}-\frac{1}{2}c_{23}c_{32})$ 落在像集 $\mathrm{Im}(\phi^2)$ 中。如果 $d_1=d_{11}d_{22}$，并且 $d_2\neq d_{11}^2$ 或者 d_{22}^2，则或者 $d_{11}d_{k_1l_1}$ 和 $d_{22}d_{k_2l_2}$，或者 $d_{11}d_{k_2l_2}$ 和 $d_{22}d_{k_1l_1}$ 落在像集 $\mathrm{Im}(\phi)$ 中，从而乘积 d_1d_2 落在像集 $\mathrm{Im}(\phi^2)$ 中。类似地如果 $d_1=d_{12}d_{21}$，则 $d_1d_{12}^2=\phi^2(-c_{22}c_{13}+\frac{1}{2}c_{12}c_{23})$，和 $d_1d_{21}^2=\phi^2(-c_{22}c_{31}+\frac{1}{2}c_{21}c_{32})$ 均落在像集 $\mathrm{Im}(\phi^2)$ 中。如果 $d_1=d_{12}d_{21}$，并且 $d_2\neq d_{12}^2$ 或者 d_{21}^2，那么通过调整乘积 d_1d_2 中元素的顺序，不难发现 d_1d_2 一定落在像集 $\mathrm{Im}(\phi^2)$ 中。最后如果 d_1 和 d_2 都不属于集合 $\{d_{11}d_{22},d_{12}d_{21}\}$，则乘积 d_1d_2 一定落在像集 $\mathrm{Im}(\phi^2)$ 中。这样我们就证明了映射 ϕ^2 是满射。

归纳地，对任意 $r\geqslant 2$，我们都可以将映射 ϕ 延拓为余代数的满射 $\phi^r: K[c_{ij}]_r\longrightarrow K[d_{ij}]_{2r}$。现在我们需要逐一地验证理想 $I\langle SO_3^0\rangle$ 中的二次生成关系均落在映射 ϕ^2 的核中。例如

$$\phi^2(2c_{31}c_{11}+c_{21}^2)=-2d_{21}^2d_{11}^2+(-\sqrt{2}d_{11}d_{21})^2=0,$$

$$\phi^2(c_{31}c_{12}+c_{21}c_{22}+c_{11}c_{32})=(-d_{21}^2)(-\sqrt{2}d_{11}d_{12})+(-\sqrt{2}d_{11}d_{21})(d_{11}d_{22}+d_{12}d_{21})$$
$$+d_{11}^2(\sqrt{2}d_{21}d_{22})=0。$$

因为 ϕ^r 被定义为保持乘法的映射，因此对任意正整数 $r\geqslant 2$，齐次部分 $I\langle SO_3^0(K)\rangle_r$ 都落在映射 ϕ^r 的核中。这样对任意 $r\geqslant 2$，我们都得到了余代数的满射 $\phi^r: K\langle SO_3^0(K)\rangle_r \longrightarrow K\langle GL_2(K)\rangle_{2r}$。 ■

下面我们来考虑正交群 $O_n(K)$（$n\geqslant 2$）的 Schur 代数。根据定义

$$O_n(K)=\{M\in\mathcal{M}_n(K): M^{tr}JM=J=MJM^{tr}\},$$

其相似群为

$$O_n^0(K)=\{M\in\mathcal{M}_n(K): M^{tr}JM=sJ=MJM^{tr},\ 0\neq s\in K\},$$

其中 J 为在所有 $(i,n+1-i)$-位置取 1，在其余位置取 0 的对称矩阵。作为一般线性群 $GL_n(K)$ 的子群，正交群 $O_n(K)$ 和相似群 $O_n^0(K)$ 作用在 n 维列向量空间 E 及其张量积空间 $E^{\otimes r}$（$r\geqslant 1$）上。相应的 Schur 代数，记为 $S^{D'}(n,r)$，定义为表示映射

$$KO_n(K)\longrightarrow \mathrm{End}_K(E^{\otimes r})$$

的像集，也等于表示映射

$$KO_n^0(K)\longrightarrow \mathrm{End}_K(E^{\otimes r})$$

的像集。当 $r=0$ 时，约定 $S^{D'}(n,0)=K$。我们记 $K[O_n(K)]_r^0$ 和 $K\langle O_n^0(K)\rangle_r$ 分别为多项式表示 $E^{\otimes r}$ 在正交群 $O_n(K)$ 和相似群 $O_n^0(K)$ 上的系数空间，它们也是齐次多项式环 $K[c_{ij}]_r$ 分别到 $O_n(K)$ 和 $O_n^0(K)$ 上的限制。根据引理 2.3，$S^{D'}(n,r)$ 等于余代数 $K[O_n(K)]_r^0$ 和 $K\langle O_n^0(K)\rangle_r$ 的线性对偶。

特殊正交群 $SO_n(K)$ 是正交群 $O_n(K)$ 的行列式为 1 的子群，比较二者的 Schur 代数，我们有如下命题。

命题 5.3: 当 n 为奇数时，对任意 $r\geqslant 0$，我们有 $S^{D'}(n,r)=S^B(n,r)$。当 n 为偶数且 $r<n/2$ 时，我们有 $S^{D'}(n,r)=S^D(n,r)$。

证明: 记 $I(O_n^0)$ 为多项式环 $K[c_{ij}]$ 的由

$$\{c_1(i,i')-c_2(j,j'):\forall\, i,j\}\cup\{c_1(i,j),\ c_2(i,j):\forall\, j\neq i'\}$$

生成的理想。这是一个齐次理想，即

$$I(O_n^0)=\bigoplus_{r\geqslant 0}I(O_n^0)_r=\bigoplus_{r\geqslant 0}(I(O_n^0)\cap K[c_{ij}]_r)。$$

余代数 $K\langle O_n^0\rangle_r$ 就是 $K[c_{ij}]_r$ 模去余理想 $I(O_n^0)_r$ 得到的。通过比较 $O_n(K)$ 和 $SO_n(K)$ 的理想，我们发现当 n 为奇数时，对任意 $r\geqslant 0$，$I(O_n^0)_r=I(SO_n^0)_r$；当 n 为偶数时，对任意 $r<n/2$，$I(O_n^0)_r=I(SO_n^0)_r$。命题成立。 ■

例 5.7: 当 $n=2$ 时，理想 $I(O_2^0)=\langle c_{11},c_{22}\rangle\cdot\langle c_{12},c_{21}\rangle$，因此

$$K[O_2^0]\cong K[c_{ij}]/\langle c_{11},c_{22}\rangle\oplus K[c_{ij}]/\langle c_{12},c_{21}\rangle\cong K[c_{12},c_{21}]\oplus K[c_{11},c_{22}]。$$

因此对任意正整数 $r\geqslant 1$，余代数 $K[O_2^0]_r$ 有整基

$$\{c_{12}^i c_{21}^{r-i},\ c_{11}^i c_{22}^{r-i}:i=0,1,\dots,r\},$$

从而 Schur 代数 $S^{D'}(2,r)$ 有对偶整基

$$\{\xi_{1^i2^{r-i},2^i1^{r-i}},\ \xi_{1^i2^{r-i},1^i2^{r-i}}:i=0,1,\dots,r\}。$$

这是 $S^A(2,r)$ 的 $2(r+1)$-维的子代数，并且

$$S^{D'}(2,r)\cong\begin{cases}(\mathcal{M}_2(K))^{\oplus\frac{r+1}{2}} & \text{如果 } r \text{ 是奇数；}\\ (\mathcal{M}_2(K))^{\oplus\frac{r}{2}}\oplus K^{\oplus 2} & \text{如果 } r \text{ 是偶数。}\end{cases}$$

■

5.3 Schur–Weyl 对偶（基域 K）

本节中基域为特征不等于 2 的代数封闭域 K。我们来证明当参数 $r=2$ 时

正交群、辛群和 Brauer 代数之间的 Schur–Weyl 对偶，同时我们还将得到 Schur 代数 $S^X(n,2)$的代数结构（$X = B$、C、D），特别地，它们都是有限表示型的拟遗传代数。需要指出的是，任意参数下辛群的 Schur–Weyl 对偶最近由 Dipper，Doty 和胡峻证明 [12]。

当基域 K 的特征不等于 2 时，（特殊）正交群、辛群及其相似群和李代数的定义均不依赖于矩阵 J 和 J' 的选取（注 2.1），从而相应的 Schur 代数也不依赖于矩阵 J 和 J' 的选取。本节中我们将取 J 为恒等矩阵来定义（特殊）正交群，而 J' 如 2.1节中定义，即 J' 是一个 $n = 2m$ 阶的反对称、可逆矩阵，在所有 $(i, n+1-i)$ 位置取 1、在所有 $(n+1-i, i)$ 位置取 -1（$i = 1, 2, \ldots, m$），在其余位置取零。回顾 n 是典型群 G 中矩阵的阶，E 是 G 的标准表示。记 $\{v_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ 为 E 的自然基，那么 $\{v_i \otimes v_j : i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ 就是张量积空间 $E \otimes E$ 的一组基。我们简记 $v_{ij} = v_i \otimes v_j$。

Brauer 代数是由 Brauer 于 1937 年引入的 [10]，在这篇文章中他在特征零的域上对正交群和辛群实现了 Schur–Weyl 对偶。我们这里仅限于讨论参数 $r = 2$ 的 Brauer 代数 $B_2(\delta)$，其中 $\delta \in K$，这是一个三维的交换 K-代数，有 K-基 $\{\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2\}$，其中 Δ_0 为单位，乘法由

$$\Delta_1^2 = \Delta_0, \quad \Delta_2^2 = \delta\Delta_2, \quad \Delta_1\Delta_2 = \Delta_2\Delta_1 = \Delta_2,$$

给出。在类型为 B_m（$m \geqslant 2$）和 D_m（$m \geqslant 4$）时，参数 $\delta = n$，Brauer 代数 $B_2(n)$ 通过

$$(v_{ij})\Delta_0 = v_{ij}, \quad (v_{ij})\Delta_1 = v_{ji}, \quad (v_{ij})\Delta_2 = \delta_{ij}\sum_{k=1}^{n} v_{kk}$$

右作用在张量积 $E \otimes E$ 上。在类型为 C_m（$m \geqslant 2$）时，$n = 2m$，参数 $\delta = -n$，Brauer 代数 $B_2(-n)$ 通过

$$(v_{ij})\Delta_0 = v_{ij}, \quad (v_{ij})\Delta_1 = -v_{ji}, \quad (v_{ij})\Delta_2 = \epsilon(i)\delta_{ji'}\sum_{k=1}^{n} \epsilon(k')v_{kk'}$$

右作用在 $E \otimes E$ 上，其中 $i' = n+1-i$，当 $1 \leqslant i \leqslant m$ 时 $\epsilon(i) = 1$，当 $m \leq i \leqslant n$ 时 $\epsilon(i) = -1$。

本节的主要结果如下：

定理 5.1: 设 G 是一个类型为 B_m（$m \geqslant 2$）、C_m（$m \geqslant 2$）或者 D_m（$m \geqslant 4$）的典型群。那么 G 在张量积空间 $E \otimes E$ 上的左作用与 $B_2(\delta)$ 在 $E \otimes E$ 上的右作用可交换，并且双中心性质（即 Schur–Weyl 对偶）成立：

$$S^X(n, 2) = \mathrm{End}_{B_2(\delta)}(E \otimes E),$$

$$B_2(\delta) = \mathrm{End}_{KG}(E \otimes E) = \mathrm{End}_{S^X(n,2)}(E \otimes E)。$$

注记 5.1: 根据命题 5.3，将 B、D 型的典型群（即特殊正交群）换成正交群时，定理 5.1同样成立。事实上我们还证明了 Brauer 代数在 $E \otimes E$ 上的作用是忠实的，因为双中心性质仅断言 Brauer 代数在表示映射下的像等于自同态代数 $\mathrm{End}_{KG}(E \otimes E)$。 ■

引理 5.2是有限维代数的表示理论中的自然结果，可参见 [60]。

引理 5.2: 设 B 是一个单位元为 1 的 K-代数，设 $e_1, \ldots, e_l$ 是 B 的两两相互正交的中心幂等元，且满足 $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_l$。则代数 B 有块分解 $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_l$，其中 对每个 $1 \leqslant i \leqslant l$，$B_i = Be_i = e_iB$。从而每个右 B-模 V 都同构于 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_l$，其中 $V_i = Ve_i$，B_i 非平凡的作用在 V_j上当且仅当 $i = j$，并且 $\mathrm{End}_B(V) \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{End}_{B_i}(V_i)$。

我们记 $p\ (\neq 2)$ 为域 K 的特征。下面的引理 5.3–5.6和命题 5.4、5.5证明了特殊正交群（即类型为 B_m 和 D_m 的典型群）的情形。

引理 5.3: （1）当 p 不能整除 n 时，$B_2(n)$是一个同构于 $K \oplus K \oplus K$的半单代数，有三个本原的中心幂等元：$e_1 = \frac{1}{2}\Delta_0 + \frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{1}{n}\Delta_2$，$e_2 = \frac{1}{n}\Delta_2$ 和 $e_3 = \frac{1}{2}\Delta_0 - \frac{1}{2}\Delta_1$。

（2）当 p 整除 n 时，$B_2(n)$作为 K-代数同构于 $K[X]/(X^2) \oplus K$，并且有两个本原幂等元：$\widetilde{e_1} = \frac{1}{2}\Delta_0 + \frac{1}{2}\Delta_1$ 和 $\widetilde{e_2} = \frac{1}{2}\Delta_0 - \frac{1}{2}\Delta_1$。

证明: （1）只需直接验证 e_1、e_2和e_3是中心幂等元、两两正交，并且 $e_1 + e_2 + e_3 = \Delta_0$。我们记 $L(1)$、$L(2)$ 和 $L(3)$ 分别为 $B_2(n)$ 的相应于 e_1、e_2 和 e_3 的右单模，它们同时也是射影模。

（2）易见 $\widetilde{e_1}+\widetilde{e_2}=\Delta_0$。由 $\widetilde{e_1}$ 生成的子代数 $B_2(n)\widetilde{e_1}=K\{\frac{1}{2}\Delta_0+\frac{1}{2}\Delta_1,\ \Delta_2\}$，它作为 K-代数同构于 $K[X]/(X^2)$（把 Δ_2 映为 X）。由 $\widetilde{e_2}$ 生成的子代数 $B_2(n)\widetilde{e_2}=K\{\frac{1}{2}\Delta_0-\frac{1}{2}\Delta_1\}$ 同构于 K本身。我们记 $\widetilde{L}(1)$ 和 $\widetilde{L}(2)$ 分别为相应于 $\widetilde{e_1}$ 和 $\widetilde{e_2}$ 的右单模，记 $\widetilde{P}(1)\triangleq B_2(n)\widetilde{e_1}$ 为 $\widetilde{L}(1)$ 的射影闭包（也称投射盖）。注意单模 $\widetilde{L}(2)$ 自己就是射影模。 ■

引理 5.4: （1）当 p 不整除 n 时，我们有右 $B_2(n)$-模的同构

$$E\otimes E\ \cong\ L(1)^{\oplus(\frac{n^2+n}{2}-1)}\oplus L(2)\oplus L(3)^{\oplus\frac{n^2-n}{2}}。$$

（2）当 p 整除 n 时，我们有右 $B_2(n)$-模的同构

$$E\otimes E\ \cong\ \widetilde{L}(1)^{\oplus(\frac{n^2+n}{2}-2)}\oplus\widetilde{P}(1)\oplus\widetilde{L}(2)^{\oplus\frac{n^2-n}{2}}。$$

证明: （1）通过计算可得，$(E\otimes E)e_1$ 的维数为 $\frac{n^2+n}{2}-1$，有 K-基

$$\{v_{ii}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}v_{kk'}:1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{\frac{1}{2}(v_{ij}+v_{ji}):1\leqslant j<i\leqslant n\};$$

$(E\otimes E)e_2$ 的维数为 1，有 K-基 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}v_{kk'}\}$；而$(E\otimes E)e_3$ 的维数为 $\frac{n^2-n}{2}$，有 K-基 $\{\frac{1}{2}(v_{ij}-v_{ji}):1\leqslant j<i\leqslant n\}$。根据引理 5.2和引理 5.3（1）可知，作为右 $B_2(n)$-模，

$$\begin{aligned}E\otimes E\ &\cong\ (E\otimes E)e_1\oplus(E\otimes E)e_2\oplus(E\otimes E)e_3\\ &\cong\ L(1)^{\oplus(\frac{n^2+n}{2}-1)}\oplus L(2)\oplus L(3)^{\oplus\frac{n^2-n}{2}}。\end{aligned}$$

（2）此时 $(E\otimes E)\widetilde{e_2}$ 的维数为 $\frac{n^2-n}{2}$，有 K-基 $\{\frac{1}{2}(v_{ij}-v_{ji}):1\leqslant j<i\leqslant n\}$。而 $(E\otimes E)\widetilde{e_1}$ 的维数为 $\frac{n^2+n}{2}$，有 K-基 $\{\frac{1}{2}(v_{ij}+v_{ji}):1\leqslant j\leqslant i\leqslant n\}$，其中有 $\frac{n^2+n}{2}-2$ 个直和项同构于 $\widetilde{L}(1)$，它们的基为

$$\{\frac{1}{2}(v_{ij}+v_{ji}):1\leqslant i<j\leqslant n\}\cup\{v_{ii}-v_{nn}:1\leqslant i\leqslant n-2\},$$

余下的直和项同构于 $\widetilde{P}(1)$，基为 $\{v_{nn},\ \sum_{k=1}^{n}v_{kk'}\}$。类似于（1）的情形，由引

理 5.2和引理 5.3（2）可得结论。 ■

引理 5.5: （1）当 p 不整除 n 时，自同态代数 $\mathrm{End}_{B_2(n)}(E\otimes E)$ 是半单代数并且同构于 $\mathcal{M}_{\frac{n^2+n}{2}-1}(K)\oplus K\oplus\mathcal{M}_{\frac{n^2-n}{2}}(K)$。

（2）当 p 整除 n 时，自同态代数 $\mathrm{End}_{B_2(n)}(E\otimes E)$ 是拟遗传代数，它的箭图为

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \underset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "\beta"] & \underset{3}{\bullet} \end{tikzcd}$$

关系为 $\beta\circ\alpha=0$，偏序关系为 $1>2$（3 任意），相应的单模 $S(1)$、$S(2)$ 和 $S(3)$ 的维数分别为 $\frac{n^2+n}{2}-2$、1 和 $\frac{n^2-n}{2}$。

（3）无论在哪种情况下，自同态代数 $\mathrm{End}_{B_2(n)}(E\otimes E)$ 的维数都等于

$$(\frac{n^2+n}{2}-1)^2+1+(\frac{n^2-n}{2})^2=\binom{n^2+1}{2}-(n+2)(n-1)。$$

证明: 由引理 5.4直接计算可得。 ■

引理 5.6: 正交群 $O_n(K)$ 在张量积空间 $E\otimes E$ 上的左作用和 Brauer 代数 $B_2(n)$ 在 $E\otimes E$ 上的右作用可交换。

证明: 根据定义可知：对任意 $g\in O_n(K)$ 和 $i,j=1,2,\ldots,n$，有 $(gv_{ij})\Delta_1=g(v_{ij}\Delta_1)$。下面来验证对任意 $g\in O_n(K)$ 和 $i,j=1,2,\ldots,n$，$(gv_{ij})\Delta_2=g(v_{ij}\Delta_2)$。设群元素 $g=(a_{ij})_{n\times n}$。根据定义 $g\in O_n(K)$ 当且仅当 $g^{tr}g=I=gg^{tr}$，即 $\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}$。因此

$$\begin{aligned}
(gv_{ij})\Delta_2 &= (g\cdot(v_i\otimes v_j))\Delta_2=(gv_i\otimes gv_j)\Delta_2=(\sum_{k,l=1}^n a_{ki}a_{lj}v_{kl})\Delta_2\\
&= \sum_{k,l=1}^n a_{ki}a_{lj}(v_{kl}\Delta_2)=\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}(v_{kk}\Delta_2)\\
&= \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}(\sum_{l=1}^n v_{ll})=\delta_{ij}\sum_{l=1}^n v_{ll},\\
g(v_{ij}\Delta_2) &= g(\delta_{ij}\sum_{k=1}^n v_{kk})=\delta_{ij}\sum_{k=1}^n gv_k\otimes gv_k=\delta_{ij}\sum_{k=1}^n\sum_{p,q=1}^n a_{pk}a_{qk}v_{pq}
\end{aligned}$$

$$= \delta_{ij}\sum_{p,q=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{pk}a_{qk})v_{pq} = \delta_{ij}\sum_{p=1}^{n}v_{pp} = (gv_{ij})\Delta_2。$$

证毕。 ■

命题 5.4: 当类型为 B_m（$m \geqslant 2$）和 D_m（$m \geqslant 4$）时，我们有

$$S^X(n,2) \;=\; \mathrm{End}_{B_2(n)}(E\otimes E)。$$

证明: 根据命题 5.3，Schur 代数 $S^X(n,2)$ 等于表示映射$KO_n(K) \longrightarrow \mathrm{End}_K(E\otimes E)$的像。再根据引理 5.6，$S^X(n,2)$ 是自同态代数 $\mathrm{End}_{B_2(n)}(E\otimes E)$ 的子代数。而根据引理 5.5和命题 5.1，这两个代数的维数相等，因此它们必然相等。 ■

命题 5.5: 当类型为 B_m（$m \geqslant 2$）和 D_m（$m \geqslant 4$）时，我们有

$$\mathrm{End}_{S^X(n,2)}(E\otimes E) \;=\; B_2(n)。$$

证明: 当 p 不整除 n 时，由引理 5.5（1）和命题 5.4可知 $\mathrm{End}_{S^X(n,2)}(E\otimes E)$ 同构于 $K\oplus K\oplus K$，从而根据引理 5.3（1）同构于 $B_2(n)$。当 p整除 n 时，作为右 $S^X(n,2)$-模，$E\otimes E$ 同构于

$$\begin{array}{c} S(2) \\ S(1) \bigoplus S(3) \\ S(2) \end{array}$$

故 $\mathrm{End}_{S^X(n,2)}(E\otimes E)$ 同构于 $K[X]/(X^2)\oplus K$，从而根据引理 5.3（2）同构于 $B_2(n)$。另一方面，由引理 5.6知，Brauer 代数 $B_2(n)$ 是自同态代数 $\mathrm{End}_{S^X(n,2)}(E\otimes E)$ 的子代数，因此二者相等。 ■

下面我们不加证明地列出相应于辛群的证明步骤（引理 5.7–5.9和命题 5.6）。

引理 5.7: 当 p 不整除 n时，以下结论成立：

（1）Brauer 代数 $B_2(-n)$ 是同构于 $K\oplus K\oplus K$ 的半单代数，有三个本原的中心幂等元：$e_1 = \frac{1}{2}\Delta_0 + \frac{1}{2}\Delta_1 + \frac{1}{n}\Delta_2$，$e_2 = -\frac{1}{n}\Delta_2$ 和 $e_3 = \frac{1}{2}\Delta_0 - \frac{1}{2}\Delta_1$。

（2）记 $L(1)$、$L(2)$ 和 $L(3)$ 分别为对应于 e_1、e_2 和 e_3的一维的右 $B_2(-n)$-单模，它们同时是射影模。我们有作为右 $B_2(-n)$-模的同构：

$$E\otimes E \ \cong\ L(1)^{\oplus(\frac{n^2-n}{2}-1)}\oplus L(2)\oplus L(3)^{\oplus\frac{n^2+n}{2}}。$$

（3）自同态代数 $\mathrm{End}_{B_2(-n)}(E\otimes E)$ 是同构于 $\mathcal{M}_{\frac{n^2-n}{2}-1}(K)\oplus K\oplus\mathcal{M}_{\frac{n^2+n}{2}}(K)$ 的半单代数。

引理 5.8: 当 p 整除 n 时，以下结论成立：

（1）Brauer 代数 $B_2(-n)$ 同构于 $K[X]/(X^2)\oplus K$，并且有两个本原的中心幂等元：$\widetilde{e_1}=\frac{1}{2}\Delta_0+\frac{1}{2}\Delta_1$ 和 $\widetilde{e_2}=\frac{1}{2}\Delta_0-\frac{1}{2}\Delta_1$。

（2）记 $\widetilde{L}(1)$ 和 $\widetilde{L}(2)$ 分别为相应于 $\widetilde{e_1}$ 和 $\widetilde{e_2}$ 的一维的右 $B_2(-n)$-单模，记 $\widetilde{P}(1)=B_2(-n)\widetilde{e_1}$ 为单模 $\widetilde{L}(1)$ 的 2 维的射影闭包，单模 $\widetilde{L}(2)$ 同时是射影模。我们有作为右 $B_2(-n)$-模的同构：

$$E\otimes E \ \cong\ \widetilde{L}(1)^{\frac{n^2-n}{2}-2}\oplus\widetilde{P}(1)\oplus\widetilde{L}(2)^{\oplus\frac{n^2+n}{2}}。$$

（3）自同态代数 $\mathrm{End}_{B_2(-n)}(E\otimes E)$ 是拟遗传代数，其箭图为

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \underset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "\beta"] & \underset{3}{\bullet} \end{tikzcd}$$

关系为 $\beta\circ\alpha=0$，偏序关系为 $1>2$（3 任意），相应的单模 $S(1)$、$S(2)$ 和 $S(3)$ 的维数分别为 $\frac{n^2-n}{2}-2$、1 和 $\frac{n^2+n}{2}$。

引理 5.9: 自同态代数 $\mathrm{End}_{B_2(-n)}(E\otimes E)$ 的维数等于

$$(\frac{n^2-n}{2}-1)^2+1+(\frac{n^2+n}{2})^2=\binom{n^2+1}{2}-(n-2)(n+1)。$$

命题 5.6: 设 $m\geqslant 2$，$n=2m$，则以下结论成立：

（1）辛群 $SP_n(K)$ 在张量积空间 $E\otimes E$ 上的左作用与 Brauer 代数 $B_2(-n)$ 在 $E\otimes E$ 上的右作用可交换。

（2）作为 K-代数，我们有 $S^C(n,2) = \mathrm{End}_{B_2(-n)}(E\otimes E)$，并且 $\mathrm{End}_{S^C(n,2)}(E\otimes E) = B_2(-n)$。

根据定理 3.1，当 $X = B$、C 和 D 时，权集 $\pi^X(n,2) = \{2\varepsilon_1,\ \varepsilon_1+\varepsilon_2,\ 0\}$，且在支配序下 $2\varepsilon_1 > \varepsilon_1+\varepsilon_2 > \varepsilon_1+\varepsilon_2 > 0$。根据引理 5.1给出的 Weyl 模的维数公式可知，在 Schur 代数 $S^{B,D}(n,2)$的箭图中顶点 1、2、3 分别对应于支配权 $2\varepsilon_1$、0、$\varepsilon_1+\varepsilon_2$，在 Schur 代数 $S^C(n,2)$的箭图中顶点 1、2、3 分别对应于支配权 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$、0、$2\varepsilon_1$。

回顾对于代数群 G 的支配权 λ 和 μ，$[\lambda:\mu]$ 代表以 μ 为最高权的单模在以 λ 为最高权的 Weyl 模中的重数。通过考虑 Schur 代数的标准模，我们得到如下关于分解数的结论。

推论 5.1: 设 $p \neq 2$。对于特殊正交群 $SO_n(K)$（$n = 5$ 或者 $n \geqslant 7$）和正交群 $O_n(K)$（$n = 5$或者 $n \geqslant 7$），我们有 $[2\varepsilon_1 : \varepsilon_1+\varepsilon_2] = 0$，$[\varepsilon_1+\varepsilon_2 : 0] = 0$；并且当 p 不整除 n 时 $[2\varepsilon_1 : 0] = 0$，当 p 整除 n 时 $[2\varepsilon_1 : 0] = 1$。

对于辛群 $SP_n(K)$（$n \geqslant 4$，偶数），我们有 $[2\varepsilon_1 : \varepsilon_1+\varepsilon_2] = 0$，$[2\varepsilon_1 : 0] = 0$；并且当 p 不整除 n 时 $[\varepsilon_1+\varepsilon_2 : 0] = 0$，当 p 整除 n 时 $[\varepsilon_1+\varepsilon_2 : 0] = 1$。

等价的，对于（特殊）正交群的相似群，有 $[2\varepsilon_1 : \varepsilon_1+\varepsilon_2] = 0$ 和 $[\varepsilon_1+\varepsilon_2 : \varepsilon_0] = 0$。并且当 p 不整除 n 时 $[2\varepsilon_1 : \varepsilon_0] = 0$，当 p 整除 n 时 $[2\varepsilon_1 : \varepsilon_0] = 1$。对于辛群的相似群，有 $[2\varepsilon_1 : \varepsilon_1+\varepsilon_2] = 0$ 和 $[2\varepsilon_1 : \varepsilon_0] = 0$。并且当 p 不整除 n 时 $[\varepsilon_1+\varepsilon_2 : \varepsilon_0] = 0$，当 p 整除 n 时 $[\varepsilon_1+\varepsilon_2 : \varepsilon_0] = 1$。根据推论 4.2，我们可以得到关于 C 型和 D 型的分解数的更多的信息。

第 6 章　结　论

6.1 论文的主要结果

本文研究了特征不等于 2 的代数封闭域 K 上典型群的 Schur 代数 $S^X(n,r)$，在 $S^X(n,r)$ 的结构以及与典型群的超代数之间的关系方面取得了如下结果：

1. 计算了 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 的权集 $\pi^X(n,r)$，从而在复数域 $K=\mathbb{C}$ 上决定了半单代数 $S^X(n,r)$ 的分块情况。
2. 证明了集合 $\pi^X(n,r)$ 是饱和的当且仅当 $X=A$、C 或 D，并且此时 Schur 代数 $S^X(n,r)$ 是相应典型群的由 $\pi^X(n,r)$ 定义的广义 Schur 代数。这就延拓并重新证明了 J. A. Green [2]在 A 型和 Donkin [3]在 C 型的结果。同时本文对相似群证明了类似的结论。
3. 把 Schur 代数 $S^X(n,r)$（$r\geqslant 0$）纳入逆系统，并证明了相应典型群的超代数作为子代数整性地包含在其逆极限中。这推广了 Beilinsion，Lusztig 和 MacPherson [4]关于 A 型的结论。并且在 B、C、D 型时构造了两种彼此相容的逆系统。
4. 当 $K=\mathbb{C}$ 为复数域时，利用 Schur 代数的半单性，显示地给出了 Schur 代数的逆极限。
5. 计算了若干当参数 $n=2$、3 或者 $r=2$ 时的 Schur 代数。
6. 证明了当参数 $r=2$ 时，正交群、辛群和 Brauer 代数之间的双中心性质。

6.2 进一步可展开的工作

在此论文的基础上，进一步可考虑的问题和展开的工作有如下几个方面：

1. 本文证明了 B 型权集 $\pi^B(n,r)$ 不是饱和的，从而 Schur 代数 $S^B(n,r)$ 不是广义 Schur 代数，但是其拟遗传性既未被否定也未被证明。事实上我们猜测 $S^B(n,r)$ 是拟遗传代数，$\pi^B(n,r)$ 是其单模同构类的集合。
2. 注意到 B、D 型时涉及到分数系数的支配权并未在 $\pi^{B,\,D}(n,r)$ 中出现，它们对应的是特殊正交群的旋量表示（spin representation）。是否可以考

虑一个比标准表示更大的表示以包含旋量表示，并建立起相应的双中心性质？

3. 整篇论文我们要求基域特征不等于 2，以使得（特殊）正交群和辛群的定义不依赖于对称矩阵 J 和反对陈矩阵 J' 的选取。事实上特征 2 时，辛群退化为特殊正交群且依赖于 J 的选取，此时将定义出许许多多互不同构的 Schur 代数，它们之间有何关系？
4. 特征零时，通过典型李代数的泛包络代数到 Schur 代数的满射，可否将 Lusztig 的半典范基（semi-canonical bases）[61]定义到 Schur 代数上？
5. 将所得结果推广到量子 Schur 代数，证明 B、C、D 型的量子包络代数包含在 q-Schur 代数的逆极限中。

参考文献

[1] H. Weyl, The classical groups, their invariants and representations, Second edition, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1946.

[2] J. A. Green, Polynomial representataions of GL_n, Lecture Notes in Mathematics 830, Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag, 1980.

[3] S. Donkin, Good filtrations of rational modules for reductive groups, Proceedings of symposia in pure mathematics, 1987, 47:69-80.

[4] A. A. Beilinson, G. Lusztig and R. MacPherson, A geometric setting for the quantum deformation of GL_n, Duke Math. J., 1990, 61:655-677.

[5] I. Schur, über eine Klasses von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen (1901); in I. Schur, Gesammelte Abhandlungen I, 1-70, Springer, Berlin, 1973.

[6] I. Schur, über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe (1927); in I. Schur, Gesammelte Abhandlungen III, 68-85, Springer, Berlin, 1973.

[7] C. de Concini and C. Procesi, A characteristic free approach to invariant theory, Adv. Math., 1976, 21:330-354.

[8] G. D. James, The decomposition of tensors over fields of prime characteristic, Math. Z., 1980, 172:161-178.

[9] K. Erdmann, Decomposition numbers for symmetric groups and composition gactors of Weyl modules, J. Algebra, 1996, 180:316-320.

[10] R. Brauer, On algebras which are connected with the semisimple continous groups, Ann. of Math., 1937, 38(4):857-872.

[11] C. Grood, Brauer algebras and centralizer algebras for $SO_{2n}(\mathbb{C})$, J. Algebra, 1999, 222:678-707.

[12] R. Dipper, S. Doty and J. Hu, Brauer algebras, symplectic Schur algebras and Schur–Weyl duality, preprint, 2005, arXiv:math.RT/0503545.

[13] S. Doty, Polynomial representations, algebraic monoids, and Schur algebras of classical type, J. Pure Appl. Algebra, 1998, 123:165-199.

[14] R. Dipper and G. James, The q-Schur algebra, Proc. London Math. Soc., 1989, 59(3):23-50.

[15] R. Dipper and G. James, q-tensor space and q-Weyl modules, Trans. A.M.S., 1991, 327:251-282.

[16] R. Dipper, G. James and A. Mathas, The $(\mathbb{Q}, q)$-Schur algebra, Proc. London Math. Soc., 1998, 77(3):327-361.

[17] J. Du and L. Scott, The q-Schur^2 algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 2000, 352(9):4325-4353.

[18] R. M. Green, Hyperoctahedral Schur algebras, J. Algebra, 1997, 192:418-438.

[19] S. Oehms, Symplectic q-Schur algebras, PhD theis (English version), University of Stuttgart, Shaker Verlag Aachen, 1997.

[20] T. Hayashi, Quantum deformation of classical groups, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1992, 28(1):57-81.

[21] M. Jimbo, A q-analogue of $U(\mathfrak{g}(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang Baxter equation, Lett. Math. Phys., 1986, 11:247-252.

[22] J. Du, A note on quantized Weyl reciprocity at roots of unity, Algebra Colloq., 1995, 2:363-372.

[23] J. Du, B. Parshall and L. Scott, Quantum Weyl reciprocity and tilting modules, Comm. Math. Phys., 1998, 195:321-352.

[24] J. S. Birmann and H. Wenzl, Braids, link polynomials and a new algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 1989, 313:249-273.

[25] J. Murakami,The representations of q-analogue of Brauer's centrlizer algebras and the Karff-man polynomial of links, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1990, 26:935-945.

[26] S. Donkin, Schur algebras and related algebras I, J. Algebra, 1986, 104:310-328.

[27] S. Donkin, Schur algebras and related algebras II, J. Algebra, 1987, 111:354-364.

[28] S. Donkin, Schur algebras and related algebras III: integral representations, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1994, 116:37-55.

[29] S. Donkin, Schur algebras and related algebras IV: the blocks of the Schur algebras, J. Algebra, 1994, 168:400-429.

[30] S. Donkin and I. Reiten, Schur algebras and related algebras V: some quasi-hereditary algebras of finite type, J. Pure Appl. Algebra, 1994, 97(2):117-134.

[31] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Finite dimensional algebras and highest weight categories, J. reine angew. Math., 1988, 391:85-99.

[32] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Integral and graded quasi-hereditary algebras I, J. Algebra, 1990, 131:126-160.

[33] C. M. Ringel, The category of good modules over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences, Math. Z., 1991, 208:209-225.

[34] S. König, Ringel duality and Kazhdan-Lusztig theory, Pacific J. Math., 2002, 203:415–428.

[35] J. A. Green, Combinatorics and the Schur algebra, J. Pure and Appl. Alg., 1993, 88:89-106.

[36] D. K. Nakano, Some recent developments in the representation theory of general linear and symmetric groups, Representations and quantizations:357-373, Shanghai, 1998, China, High. Educ. Press, 2000.

[37] A. E. Parker, On the global dimension of Schur algebras and related algebras, PhD theis, Queen Mary and Westfield College, University of London, 2001.

[38] G. Cliff and A. Stokke, Codeterminants for the sympletic Schur algebra, J. London Math. Soc., 2005, 72:585-608.

[39] S. Doty and A. Giaquinto, Generators and relations for Schur algebras, Electronic research announcements of AMS, 2001, 7:54-62, arXiv:math.RT/0104099.

[40] S. Doty and A. Giaquinto, Presenting Schur algebras, arXiv:math.RT/0108046.

[41] S. Doty, A. Giaquinto and J. Sullivan, Presenting generalized Schur algebras in types B, C, D, preprint, arXiv:math.RT/0504075.

[42] 方明, 广义 Schur 代数之间的比较和双中心化性质[博士学位论文], 合肥：中国科学技术大学数学系, 2006.

[43] M. Fang, A. Henke and S. Keonig, Comparing GL_n-representations by characteristic-free isomorphisms between generalised Schur algebras (with an appendix by Stephen Donkin), Forum Mathematicum, to appear.

[44] A. Henke and S. König, Relating polynomial $GL(n)$-representations in different degrees, J. reine angew. Math., 2002, 511:219-235.

[45] S. Doty, K. Erdmann and A. Henke, A generic algebra associated to certain Hecke algebras, J. Algebra, 2004, 278:502-531.

[46] J. Du, q-Schur algebras, asymptotic forms, and quantum SL_n, J. algebra, 1995, 177:385-408.

[47] R. M. Green, q-Schur algebras and Quantized Enveloping Algebras, Ph.D. thesis, University of Warwick, 1995.

[48] P. Littelmann, A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras, Invent. math., 1994, 116:329-346.

[49] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, Graduate texts in mathematics 9, Springer-Verlag, 1972.

[50] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Tracts in Mathathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[51] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Graduate texts in mathematics 52, 1977.

[52] S. Donkin, Rational representations of algebraic groups: Tensor products and filtrations, Lecture notes in Mathematics 1140, Springrt-Verlag, Berlin, 1985.

[53] J. C. Jantzen, Representations of algebraic groups, Boston: academic press, 1987.

[54] R. Dipper and S. Doty, The rational Schur algebra, preprint, 2005, arXiv:math.RT/0511663.

[55] J. A. Green, Locally finite representations, J. Algebra, 1976, 41:137-171.

[56] M. Klucznik and S. König, Characteristic tilting modules over quasi-hereditary algebras, Course note (from the compact course given in March, 1998), 1-64, available from http://www.mi.uni-koeln.de/~skoenig/.

[57] S. Donkin, The q-Schur algebra, London Math. Soc. Lecture Note Series 253, Cambridge University Press, 1998.

[58] G. D. James, On the decomposition matrices of the symmestric groups III, J. Algebra, 1981, 71:115-122.

[59] S. Donkin, A note on decomposition numbers for reductive groups, J. Algebra, 1983, 80:226-234.

[60] Y. A. Drozd and V. V. Kirichenko, Finite dimensional algebras, with an appendix by V. Dlab, translated from the Russian by V. Dlab, New York: Springer-Verlag, 1994.

[61] G. Lusztig, Semicanonical bases arising from enveloping algebras, Advances in Math., 2000, 151:129-139, http://www.idealibrary.com.

致 谢

值此论文完成之际，我要衷心地感谢我的导师肖杰教授，是他将我带入代数表示论的广阔天地，并精心地引导我去了解和欣赏其迷人之处。我还要深深地感谢 Steffen König 教授，没有他的鼓励，我将无法顺利完成在英国一年的学习。他们二人的谆谆教诲将使我受益终生。

感谢清华大学数学科学系的培养，特别感谢朱彬教授、张贺春教授、张贤科教授等在学习、生活上给予我的无私关怀和帮助。感谢 Anne Henke、李立斌教授、张光连师兄、徐帆和我的师弟师妹们，他（她）们陪伴我度过了人生中最困难和最美好的时光。

最后向多年来理解、支持我的家人表示由衷的谢意。

==

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：__________ 日　期：__________

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

刘群华，女，汉族，1981年11月生于河南省遂平县。

1998年9月考入清华大学应用数学系应用数学专业，2002年7月本科毕业并获得理学学士学位。

2002年9月免试进入清华数学科学系基础数学专业攻读硕士学位。

2003年9月- 2004年9月作为联合培养对象赴英国莱斯特大学数学与计算机科学系学习。

2004年9月免试硕转博于清华数学科学系基础数学专业攻读博士学位至今。

发表的学术论文

[1] Qunhua Liu, Schur algebras of classical groups, J. Algebra, 2006, 301:867-887. (SCI, 0.459)