Klausur 28.7.2016

1. In einem Ein-Periodenmodell gibt es drei Aktiven und vier Zustände der Welt. Der Preis heute ist gegeben durch $\boldsymbol{q} = (56, 46, 47)^\top$, und die möglichen Preise zur Zeit 1 durch

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 40 & 50 & 70 & 80 \\ 50 & 45 & 60 & 50 \\ 60 & 70 & 30 & 50 \end{pmatrix} .$$

a) Zeigen Sie, dass der Markt Arbitrage-frei ist.

Es wird nun eine Call-Option auf den ersten Aktiv mit Ausübungspreis 60 eingeführt.

b) Für welche Preise der Option bleibt der Markt Arbitrage-frei?

c) Die Option wird nun für den Preis 8 gehandelt. Zeigen Sie, dass der Markt nun vollständig ist.

2. Sei $\{M_t = \int_0^t Z_t \,\mathrm{d}W_t\}$ ein lokales Martingal, so dass $\{M_t^2 - t\}$ ein lokales Martingal ist. Wir arbeiten mit der natürlichen Filtation des Prozesses M. Wir betrachten die Prozesse

$$X_t = \mathrm{e}^{r^2t/2}\cos(rM_t) , \qquad Y_t = \mathrm{e}^{r^2t/2}\sin(rM_t) ,$$

wobei $r \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{d}X_t = -rY_t \,\mathrm{d}M_t$ und $\mathrm{d}Y_t = rX_t \,\mathrm{d}M_t$.

b) Schliessen Sie, dass X und Y Martingale sind.

c) Schliessen Sie, dass $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}r(M_{s+t}-M_s)} \mid \mathcal{F}_s] = \mathrm{e}^{-r^2t/2}$, wobei $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ die komplexe Einheit ist und $t, s \geq 0$.

d) Zeigen Sie, dass M eine standard Brownsche Bewegung ist.
Hinweis: Zeigen Sie unter anderem, dass der Zuwachs $M_{s+t} - M_s$ bedingt auf $\mathcal{F}_s$ die richtige Verteilung unabhängig von $\mathcal{F}_s$ hat.

3. Wir betrachten den Prozess $\{r(t)\}$, der die stochastische Differenitalgleichung

$$\mathrm{d}r(t) = a(b - r(t))\,\mathrm{d}t + \sigma r(t)\,\mathrm{d}W_t$$

für eine Brownsche Bewegung $\{W_t\}$ erfüllt, wobei $a, b, \sigma, r(0) > 0$. $\{r(t)\}$ soll eine Zinsrate modellieren. Sei

$$f(x) = \int_1^x y^{2a/\sigma^2} \mathrm{e}^{2ab/(\sigma^2 y)}\,\mathrm{d}y\ .$$

a) Zeigen Sie, dass der Prozess $M_t = f(r_t)$ ein lokales Martingal ist.

b) Zeigen Sie, dass $r(t) > 0$ für alle t. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\overline{\lim}_{t\to\infty} r(t) = \infty$.

c) Wir wollen, dass $\{r(t)\}$ die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}r(t) = a^*(b^* - r(t))\,\mathrm{d}t + \sigma^* r(t)\,\mathrm{d}W_t^*$$

erfüllt, wobei $\{W_t^*\}$ die Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Mass bezeichnet und $a^*, b^*, \sigma^* > 0$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a, b, σ alle möglichen Risikopreisprozesse $\{q_t\}$.