Lösung der Klausur

1. a) Für einen State-Price Vektor müssen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 40\psi_1 + 50\psi_2 + 70\psi_3 + 80\psi_4 &= 56 \;, \\ 50\psi_1 + 45\psi_2 + 60\psi_3 + 50\psi_4 &= 46 \;, \\ 60\psi_1 + 70\psi_2 + 30\psi_3 + 50\psi_4 &= 47 \;, \end{aligned}$$

lösen. Entfernen von ψ_4 gibt

$$\begin{aligned} 280\psi_1 + 310\psi_2 - 110\psi_3 &= 96 \;, \\ 10\psi_1 + 25\psi_2 - 30\psi_3 &= 1 \;. \end{aligned}$$

Entfernen von ψ_1 gibt

$$-390\psi_2 + 730\psi_3 = 68 \;,$$

also

$$\psi_3 = \frac{68 + 390\psi_2}{730} \;,$$

was für alle $\psi_2 > 0$ zu einem strikt positiven ψ_3 führt. Wir erhalten

$$\psi_1 = \frac{1 + 30\psi_3 - 25\psi_2}{10} = \frac{277 - 655\psi_2}{730}$$

und

$$\psi_4 = \frac{56 - 40\psi_1 - 50\psi_2 - 70\psi_3}{80} = \frac{313 - 470\psi_2}{730} \;.$$

ψ_4 ist strikt positiv falls $\psi_2 < 313/470 \approx 0.665957$. ψ_1 ist strikt positiv, falls $\psi_2 < 277/655 \approx 0.422901$. Somit haben wir für alle $\psi_2 \in (0, 277/655)$ einen State-Preisvektor. Das bedeutet, dass keine Arbitrage existiert.

b) Die Auszahlung der Option ist $(0, 0, 10, 20)$. Verwenden wir den State-Preis Vektor, so wird der Preis

$$10\psi_3 + 20\psi_4 = \frac{694 - 550\psi_2}{73} \;,$$

Somit sind die möglichen Preise im Intervall

$$\Big(\frac{828}{131}, \frac{694}{73}\Big) \approx (6.32061, 9.50685) \;.$$

c) Ist der Preis der Option 8, so ist $694 - 550\psi_2 = 73 \cdot 8 = 584$, oder $\psi_2 = 1/5$. Dann ist $\boldsymbol{\psi} = (1/5, 1/5, 1/5, 3/10)^\top$ eindeutig bestimmt, und damit der Markt vollständig.

2. **a)** Die Funktion $f(t,x) = \mathrm{e}^{r^2 t/2}\cos(rx)$ hat die Ableitungen

$$\begin{aligned}
f_t(t,x) &= r^2 \mathrm{e}^{r^2 t/2}\cos(rx)/2 = r^2 f(t,x)/2\;,\\
f_x(t,x) &= -r\mathrm{e}^{r^2 t/2}\sin(rx)\;,\\
f_{xx}(t,x) &= -r^2 \mathrm{e}^{r^2 t/2}\cos(rx) = -r^2 f(t,x)\;.
\end{aligned}$$

Die Funktion $g(t,x) = \mathrm{e}^{r^2 t/2}\sin(rx)$ hat die Ableitungen

$$\begin{aligned}
g_t(t,x) &= r^2 \mathrm{e}^{r^2 t/2}\sin(rx)/2 = r^2 g(t,x)/2\;,\\
g_x(t,x) &= r\mathrm{e}^{r^2 t/2}\cos(rx)\;,\\
g_{xx}(t,x) &= -r^2 \mathrm{e}^{r^2 t/2}\sin(rx) = -r^2 g(t,x)\;.
\end{aligned}$$

Aus der Itô-Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= r^2 f(t,M_t)/2\;\mathrm{d}t + f_x(t,M_t)\;\mathrm{d}M_t - \tfrac{1}{2}r^2 f(t,M_t)\;\mathrm{d}t = f_x(t,M_t)\;\mathrm{d}\langle M\rangle_t\\
&= r^2 f(t,M_t)/2\;\mathrm{d}t + f_x(t,M_t)\;\mathrm{d}M_t - \tfrac{1}{2}r^2 f(t,M_t)\;\mathrm{d}t = f_x(t,M_t)\;\mathrm{d}M_t\\
&= -rY_t\;\mathrm{d}M_t\;,
\end{aligned}$$

da $\langle M\rangle_t = t$ ($\{M_t^2 - \langle M\rangle_t\}$ ist lokales Martingal), und

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t &= r^2 g(t,M_t)/2\;\mathrm{d}t + g_x(t,M_t)\;\mathrm{d}M_t - \tfrac{1}{2}r^2 g(t,M_t)\;\mathrm{d}t = g_x(t,M_t)\;\mathrm{d}M_t\\
&= rX_t\;\mathrm{d}M_t\;.
\end{aligned}$$

b) Wir haben $|X_t| \le \mathrm{e}^{r^2 t/2}$ und $|Y_t| \le \mathrm{e}^{r^2 t/2}$. Somit ist für $t \le s$ und eine Lokalisierungsfolge τ_n wegen beschränkter Konvergenz

$$\mathbb{E}[X_s \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_{s\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_t] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{s\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_t] = \lim_{n\to\infty} X_{t\wedge\tau_n} = X_t\;.$$

Somit ist X ein Martingal. Analog folgt, dass Y ein Martingal ist.

c) Die Aussage ist äquivalent zu

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{r^2(t+s)/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}rM_{s+t}} \mid \mathcal{F}_s] = \mathrm{e}^{r^2 s/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}rM_s}$$

oder

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{r^2(t+s)/2}(\cos(rM_{t+s}) + \mathrm{i}\sin(rM_{t+s})) \mid \mathcal{F}_s] = \mathrm{e}^{r^2 s/2}(\cos(rM_s) + \mathrm{i}\sin(rM_s))\;.$$

Dies können wir als

$$\mathbb{E}[X_{t+s} + \mathrm{i}Y_{t+s} \mid \mathcal{F}_s] = X_s + \mathrm{i}Y_s$$

schreiben, was aus der Martingaleigenschaft folgt.

d) Wir haben $M_0 = 0$, und $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}r(M_{s+t}-M_s)} \mid \mathcal{F}_s] = \mathrm{e}^{-r^2 t/2}$. Somit ist die Verteilung des Zuwachses $M_{s+t} - M_s$ bedingt auf $\mathcal{F}_s$ die Normalverteilung $N(0,t)$. Da die Verteilung nicht von $\mathcal{F}_s$ abhängt, ist der Zuwachs unabhängig von $\mathcal{F}_s$. Das bedeutet, der Prozess hat unabhängige Zuwächse. Also handelt es sich um eine Brownsche Bewegung, insbesondere da wir angenommen haben, dass jeder Prozess cadlag ist.

3. **a)** Wir haben $f'(x) = x^{2a/\sigma^2} \mathrm{e}^{2ab/(\sigma^2 x)}$ und

$$f''(x) = (x^{2a/\sigma^2 - 1} - bx^{2a/\sigma^2 - 2}) \frac{2a}{\sigma^2} \mathrm{e}^{2ab/(\sigma^2 x)} .$$

Aus der Itô-Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} f(r(t)) &= f(r(0)) + \sigma \int_0^t (r(t))^{2a/\sigma^2} \mathrm{e}^{1+2ab/(\sigma^2 r(t))} \,\mathrm{d}W_t \\ &\quad + \int_0^t [a(b - r(t))(r(t))^{2a/\sigma^2} + a(r(t) - b)](r(t))^{2a/\sigma^2} \mathrm{e}^{2ab/(\sigma^2 r(t))} \,\mathrm{d}t \\ &= f(r(0)) + \sigma \int_0^t (r(t))^{2a/\sigma^2} \mathrm{e}^{1+2ab/(\sigma^2 r(t))} \,\mathrm{d}W_t . \end{aligned}$$

Somit ist M ein lokales Martingal.

b) Sei $0 < \varepsilon < r(0) < L < \infty$. Sei $\tau^L = \inf\{t > 0 : r(t) > L\}$, $\tau_\varepsilon = \inf\{t > 0 : r(t) < \varepsilon\}$ und $\tau_\varepsilon^L = \tau_\varepsilon \wedge \tau^L$. Dann ist

$$\mathbb{E}[\{f(r(\tau_\varepsilon^L \wedge t)) - f(r(0))\}^2] = \sigma^2 \mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau_\varepsilon^L \wedge t} (r(t))^{4a/\sigma^2} \mathrm{e}^{2+4ab/(\sigma^2 r(t))} \,\mathrm{d}t\Big] .$$

Da der Integrand von Null wegbeschränkt ist, konvergiert auf $\{\tau_\varepsilon^L = \infty\}$ die rechte Seite nach Unendlich, während die linke Seite beschränkt ist. Somit muss τ_ε^L fast sicher endlich sein (dies war nicht zu zeigen). Da $f(r(\tau_\varepsilon^L \wedge t))$ beschränkt ist, ist es ein gleichmässig integrierbares Martingal. Somit folgt aus dem Stoppsatz und $t \to \infty$

$$f(r(0)) = \mathbb{E}[f(r(\tau_\varepsilon^L \wedge t))] = f(\varepsilon)\mathbb{P}[\tau_\varepsilon < \tau^L] + f(L)\mathbb{P}[\tau^L < \tau_\varepsilon] .$$

Daraus folgt, dass

$$\mathbb{P}[\tau_\varepsilon < \tau^L] = \frac{f(L) - f(r(0))}{f(L) - f(\varepsilon)} .$$

Lassen wir $\varepsilon \to 0$, erhalten wir mit monotoner Konvervegenz und $f(0) = -\infty$, $\mathbb{P}[\tau_0 < \tau^L] = 0$. Somit wird L fast sicher vor 0 erreicht. Lassen wir L gegen Unendliche, sehen wir, dass 0 nicht in endlicher Zeit erreicht werden kann.

c) Wir haben $\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}W_t^* + q_t \,\mathrm{d}t$. Also ist

$$\mathrm{d}r(t) = [ab - ar(t) + \sigma r(t) q_t] \,\mathrm{d}t + \sigma r(t) \,\mathrm{d}W_t .$$

Damit muss $\sigma^* = \sigma$ sein. Damit die Drift linear wird, muss also $q_t = \alpha + \beta/r(t)$ sein. Letzteres ist möglich, da $r(t) > 0$ für alle t. Als Randbedingungen erhalten wir $ab + \sigma\beta > 0$ und $a - \sigma\alpha > 0$, also $\beta > -ab/\sigma$ und $\alpha < a/\sigma$.