Nachklausur 27.9.2016

1. Ein Markt ist gegeben durch $\boldsymbol{q} = (5,5)^\top$, und die möglichen Preise zur Zeit 1 durch

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} .$$

Ein Händler hat das Einkommen $\boldsymbol{e} = (2,0,1)$ und die Nutzenfunktion

$$U(\boldsymbol{c}) = -\mathrm{e}^{-c_1} - 3\mathrm{e}^{-c_2} - 2\mathrm{e}^{-c_3} .$$

Finden Sie alle optimalen Portfolios.
Hinweis: In der Notation des Skriptes erhält man die Lösung $\lambda \approx 0.40706$, die Sie verwenden dürfen, wenn Sie $\boldsymbol{\theta}$ (oder e^{θ_1}) als Funktion von λ berechnet haben.

2. Seien $\{Z_k : k \in \mathbb{N}\}$ identisch verteilte und unabhängige Variablen. Wir nehmen an, dass es Zahlen $-\infty \le r_- < 0 < r_+ \le \infty$ gibt, so dass $m(r) = \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rZ_1}] < \infty$ für $r \in (r_-, r_+)$ gilt und

$$\lim_{r \downarrow r_-} m(r) = \lim_{r \uparrow r_+} m(r) = \infty .$$

Wir nehmen $r_+ - r_- > 1$ an. Es gilt, dass die Funktion $m : (r_-, r_+) \to \mathbb{R}$, $r \mapsto m(r)$ strikt konvex und unendlich oft differenzierbar ist (Sie brauchen dies nicht nachzuweisen).

In einem Markt haben wir die folgenden Aktiven: einen risikolosen Aktiv $S_n^0 \equiv 1$ und einen riskanten Aktiv $S_n^1 = \exp\{\sum_{k=1}^n Z_k\}$.

a) Zeigen Sie, dass es ein $\beta \in (r_-, r_+)$ gibt, so dass $m(\beta) = m(1+\beta)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Prozesse

$$L_n = \exp\Bigl\{\sum_{k=1}^n (\beta Z_k - m(\beta))\Bigr\} \quad \text{und} \quad M_n = \exp\Bigl\{\sum_{k=1}^n ([\beta+1] Z_k - m(\beta))\Bigr\}$$

Martingale sind.

c) Zeigen Sie, dass der Markt arbitragefrei ist.

3. Betrachten wir das Black–Scholes Modell. Ein Investor beschliesst, zur Zeit t jeweils einen festen Anteil θV_t des Portfolio-Wertes V_t in den riskanten Aktiv zu investieren. Hier ist $\theta \in (0,1)$ eine Konstante. Zeigen Sie:

a) Der Wert des Portfolios erfüllt

$$\mathrm{d}V_t = (r + \theta(\mu - r))V_t \,\mathrm{d}t + \sigma\theta V_t \,\mathrm{d}W_t \,.$$

b) Der Prozess $\{M_t = V_t^{1-\gamma}\}$ mit $\gamma = 2(r+\theta(\mu-r))/(\sigma^2\theta^2)$ ist ein lokales Martingal.

Nehmen wir nun $\gamma \in (0,1)$ an. Dann lässt sich zeigen, dass M ein Martingal ist (Sie müssen dies nicht nachweisen).

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[V_T^{1-\gamma}]$, wenn der Investor das Kapital x zur Zeit 0 zur Verfügung hat.