Lösung der Nachklausur

1. Die Nutzenfunktion ist konkav und differenzierbar, mit der Ableitung

$$\partial U(\boldsymbol{c}) = (\mathrm{e}^{-c_1}, 3\mathrm{e}^{-c_2}, 2\mathrm{e}^{-c_3}) \; .$$

Für ein optimales Portfolio gilt $\boldsymbol{\theta q} = 0$, also

$$5\theta_1 + 5\theta_2 = 0 \; ,$$

also $\theta_2 = -\theta_1$. Somit haben wir

$$\boldsymbol{c} = (2 - \theta_1, \theta_1, 1 - 2\theta_1) \; .$$

Damit $\boldsymbol{c} \ge 0$, muss $\theta_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ liegen. Weiter gibt es ein $\lambda > 0$, so dass $\lambda \partial U(\boldsymbol{c})^\top$ ein State-Preis-Vektor ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} 5 &= \lambda(4\mathrm{e}^{\theta_1 - 2} + 6\mathrm{e}^{-\theta_1} + 12\mathrm{e}^{2\theta_1 - 1}) \\ 5 &= \lambda(5\mathrm{e}^{\theta_1 - 2} + 3\mathrm{e}^{-\theta_1} + 16\mathrm{e}^{2\theta_1 - 1}) \; . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$5\lambda^{-1} = 6\mathrm{e}^{\theta_1 - 2} + 20\mathrm{e}^{2\theta_1 - 1} \; ,$$

oder

$$\mathrm{e}^{\theta_1} = \frac{-3\mathrm{e}^{-2} + \sqrt{9\mathrm{e}^{-4} + 100\mathrm{e}^{-1}\lambda^{-1}}}{20\mathrm{e}^{-1}} = \frac{-3\mathrm{e}^{-1} + \sqrt{9\mathrm{e}^{-2} + 100\mathrm{e}\lambda^{-1}}}{20} \; .$$

Wir bemerken, dass die zweite Lösung negativ ist, und daher nicht in Frage kommt.

Einsetzen von $\lambda = 0.40706$ ergibt $\mathrm{e}^{\theta_1} = 1.23807$ oder $\theta_1 = 0.213555$. Diese Lösung liegt im geforderten Intervall. Der Konsum wird $\boldsymbol{c} = (1.78645, 0.21355, 0.57289)$, der Nutzen

$$-\mathrm{e}^{-1.78645} - 3\mathrm{e}^{-0.21355} - 2\mathrm{e}^{-0.57289} = -3.71846 \; .$$

Die Randwerte $\theta_1 = 0$ und $\theta_1 = \frac{1}{2}$ ergeben den Nutzen $-\mathrm{e}^{-2} - 3 - 2\mathrm{e}^{-1} = -3.87109$ bzw. $-\mathrm{e}^{-1.5} - 3\mathrm{e}^{-0.5} - 2 = -4.04272$. Somit ist $\boldsymbol{\theta} = (0.213555, -0.213555)$ das einzige optimale Portfolio.

2. **a)** Die Ableitung von $m(1+b)-m(b)$ ist $m'(1+b)-m'(b)$, was wegen der strikten Konvexität echt positiv ist. Lassen wir $b \downarrow r_-$, so konvergiert $m(1+b)-m(b)$ nach $-\infty$, lassen wir $b \uparrow r_+ - 1$, so konvergiert $m(1+b)-m(b)$ nach ∞. Somit muss es eine eindeutige Lösung der Gleichung $m(1+\beta)-m(\beta) = 0$ geben.

Alternativ könnte man argumentieren, dass wegen $m(r_-) = m(r_+) = \infty$ die Funktion $m(r)$ ein Minimum haben muss. Wegen der strikten Konvexität ist dieses Minimum eindeutig. Sei r_0 das Argument, an dem das Minimum angenommen wird. Dann können wir die Umkehrfunktionen $g_1 : [m(r_0), \infty) \to (r_-, r_0]$ und $g_2 : [m(r_0), \infty) \to [r_0, r_+)$ definieren. Dann ist die Funktion g, $[m(r_0), \infty) \to [0, s_+ - s_-)$, $s \mapsto g_2(s) - g_1(s)$ steigend. Es gilt $g(m(r_0)) = 0$, und für $s \to \infty$ konvergiert $g(s)$ nach $r_+ - r_- > 1$. Also muss es eine Lösung der Gleichung $g_2(\beta) - g_1(\beta) = 1$ geben.

b) Es gilt $\mathbb{E}[e^{\alpha Z_k}] = e^{m(\alpha)}$, und daher

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{\sum_{k=1}^{n+1}(\alpha Z_k - m(\alpha))\Big\}\Big] = 1\ .$$

Das bedeutet, der Prozess ist integrierbar. Dass er adaptiert ist, ist auch klar. Wir haben weiter

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{\sum_{k=1}^{n+1}(\alpha Z_k - m(\alpha))\Big\} \;\Big|\; \mathcal{F}_n\Big] \\ &= \exp\Big\{\sum_{k=1}^{n}(\alpha Z_k - m(\alpha))\Big\}\mathbb{E}[e^{\alpha Z_{n+1} - m(\alpha)} \mid \mathcal{F}_n] = \exp\Big\{\sum_{k=1}^{n}(\alpha Z_k - m(\alpha))\Big\}\ .\end{aligned}$$

Somit ist $\{\exp\{\sum_{k=1}^n(\alpha Z_k - m(\alpha))\}\}$ für jedes $\alpha \in (r_-, r_+)$ ein Martingal. Da $m(\beta+1) = m(\beta)$ folgt die Aussage.

c) Setzen wir eine Radon–Nikodym Ableitung der Form $\{\exp\{\sum_{k=1}^n(\alpha Z_k - m(\alpha))\}\}$ an, dann sollte

$$\exp\Big\{\sum_{k=1}^{n} Z_k\Big\}\exp\Big\{\sum_{k=1}^{n}(\alpha Z_k - m(\alpha))\Big\} = \exp\Big\{\sum_{k=1}^{n}([1+\alpha]Z_k - m(\alpha))\Big\}$$

ein Martingal sein. Dies ist der Fall für $\alpha = \beta$. Also existiert ein äquivalentes Martingalmass, und es existiert keine Arbitrage.

3. **a)** Wir bemerken, dass die Anzahl Aktien $\phi_t = \theta V_t / S_t$ und die Anzahl Geldeinheiten $\phi_t^0 = (1-\theta)V_t/S_t^0$ ist. Wir haben somit

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V_t &= \frac{\theta V_t}{S_t}\,\mathrm{d}S_t + \frac{(1-\theta)V_t}{S_t^0}\,\mathrm{d}S_t^0 = \theta V_t \sigma\,\mathrm{d}W_t + (\theta V_t \mu + (1-\theta)V_t r)\,\mathrm{d}t \\ &= \sigma\theta V_t\,\mathrm{d}W_t + (r + \theta(\mu - r))V_t\,\mathrm{d}t\ .\end{aligned}$$

b) Sei $f(v) = v^{1-\gamma}$. Dann ist $f'(v) = (1-\gamma)v^{-\gamma}$ und $f''(v) = -\gamma(1-\gamma)v^{-\gamma-1}$. Damit erhalten wir mit Itô's Formel

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M_t &= (1-\gamma)V_t^{-\gamma}\,\mathrm{d}V_t - \tfrac{1}{2}(1-\gamma)\gamma V_t^{-\gamma-1}\sigma^2\theta^2 V_t^2\,\mathrm{d}t \\ &= (1-\gamma)[(r+\theta(\mu-r)) - \tfrac{1}{2}\gamma\sigma^2\theta^2]V_t^{1-\gamma}\,\mathrm{d}t + (1-\gamma)\sigma\theta V_t^{1-\gamma}\,\mathrm{d}W_t \\ &= (1-\gamma)\sigma\theta V_t^{1-\gamma}\,\mathrm{d}W_t\ , \end{aligned}$$

wobei wir die Definition von γ verwendet haben. Damit ist M ein lokales Martingal.

c) Die Martingaleigenschaft gibt

$$\mathbb{E}[V_T^{1-\gamma}] = V_0^{1-\gamma} = x^{1-\gamma}\ .$$