Klausur 9.7.2019

1. In einem Ein-Periodenmodell ist der Markt gegeben durch $\boldsymbol{q} = (50, 48, 63)^\top$ und

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 40 & 55 \\ 52 & 46 \\ 60 & 66 \end{pmatrix} .$$

a) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass der Markt nicht arbitragefrei ist.

b) (2 Punkte) Wie müsste der Preis von Aktiv 3 sein, damit der Markt arbitragefrei wäre?

c) (4 Punkte) Eine Tauschoption erlaubt einem Händler, falls er möchte, den ersten Aktiv gegen den zweiten zu tauschen. Wie ist der faire Preis dieser Option (nach einer Korrektur des Preises des dritten Aktivs)?

2. Sei $p_t \in (0,1)$. Seien $\{Y_t\}$ unabhängige Bernoulli(p_t) verteilte Zufallsvariablen, das heisst, $\mathbb{P}[Y_t = 1] = 1 - \mathbb{P}[Y_t = 0] = p_t$. Beachten Sie, dass die p_t nicht identisch sein müssen. Wir definieren $N_t = \sum_{k=1}^t Y_k$. Ein Markt ist definiert durch den risikolosen Aktiv $S_t^0 \equiv 1$ und den riskanten Aktiv $S_t = \exp\{2N_t - t\}$, $t \in [0,T] \cap \mathbb{N}$. Im Markt wird nun eine amerikanische Put-Option mit Auszahlung $Z_k = \mathbb{1}_{k \le 2}(1 - S_k)^+$ angeboten.

a) (4 Punkte) Bestimmen Sie $p_t^* = \mathbb{P}^*[Y_t = 1 \mid \mathcal{F}_{t-1}]$ unter dem äquivalenten Martingalmass.

b) (8 Punkte) Bestimmen Sie den fairen Preis der amerikanischen Option zur Zeit 0 und alle optimalen Strategien.

3. Wir betrachten den Prozess $\{r(t)\}$, gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}r(t) = [1 - (r(t))^2]\,\mathrm{d}t + r(t)\,\mathrm{d}W_t\;, \qquad r(0) = x\;,$$

für eine Brownsche Bewegung $\{W_t\}$ und $x > 0$. Weiter sei

$$f(u) = \int_1^u \exp\{2v + 2v^{-1}\}\,\mathrm{d}v\;.$$

Wir bezeichnen mit $\tau^z = \inf\{t > 0 : r(t) > z\}$ und mit $\tau_y = \inf\{t > 0 : r(t) < y\}$ die Zeiten, zu denen das erste Mal z bzw. y erreicht wird. Wir nehmen $0 < y < x < z$ an. Sei $\tau_y^z = \tau_y \wedge \tau^z$.

a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $\{M_t\}$ für $M_t = f(r(\tau_y^z \wedge t))$ ein Martingal ist.

b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass τ_y^z fast sicher endlich ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\{f(r(\tau_y^z \wedge t))\}^2$.

c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass der Wert 0 nie erreicht wird.