Lösung der Klausur

1. a) Wir müssen die Gleichung $\boldsymbol{D\psi} = \boldsymbol{q}$ lösen. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir $\boldsymbol{\psi} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^\top$. Dann müsste der Preis des dritten Aktivs $\frac{1}{3} \cdot 60 + \frac{2}{3} \cdot 66 = 64$ sein. Somit kann der Markt nicht arbitragefrei sein.

b) Der Preis müsste 64 lauten.

c) Der Gewinn ist 12, falls Zustand 1 eintritt. In Zustand 2 wird die Option nicht ausgeübt. Somit muss der faire Preis $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ sein.

2. a) Es gilt wegen der Martingaleigenschaft

$$S_{t-1} = \mathbb{E}^*[S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = S_{t-1}(p_t^* \mathrm{e} + (1 - p_t^*)\mathrm{e}^{-1}) \;.$$

Somit folgt

$$p_t^* = \frac{1 - \mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}^2 - 1} \;, \qquad 1 - p_t^* = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}}{\mathrm{e}^2 - 1} \;.$$

Somit hängt p_t^* nicht von t ab.

b) Der Wert zur Zeit 2 ist $U_2 = Z_2 = (1 - S_2)^+$. Die möglichen Werte für S_2 sind $\{\mathrm{e}^2, 1, \mathrm{e}^{-2}\}$. Somit ist $Z_2 > 0$ nur falls $S_2 = \mathrm{e}^{-2}$. Zur Zeit 1 erhalten wir

$$\mathbb{E}^*[U_2 \mid \mathcal{F}_1] = \mathbb{1}_{Y_1=0} \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}}{\mathrm{e}^2 - 1}(1 - \mathrm{e}^{-2}) = \mathbb{1}_{Y_1=0}(1 - \mathrm{e}^{-1}) = \mathbb{1}_{Y_1=0} Z_1 \;.$$

Im Zeitpunkt 0 ist $Z_0 = 0$, und

$$U_0 = \mathbb{E}^*[\mathbb{1}_{Y_1=0}(1 - \mathrm{e}^{-1})] = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}}{\mathrm{e}^2 - 1}(1 - \mathrm{e}^{-1}) = \frac{(\mathrm{e} - 1)^2}{\mathrm{e}^2 - 1} = \frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e} + 1} \;.$$

Somit sind alle Strategien optimal, bei denen man in 1 oder 2 stoppt.

3. a) Wir erhalten die Ableitungen

$$f'(u) = \exp\{2u + 2u^{-1}\} \;, \qquad f''(u) = 2(1 - u^{-2}) \exp\{2u + 2u^{-1}\} \;.$$

Wir haben dann

$$(1 - u^2) f'(u) + \tfrac{1}{2} u^2 f''(u) = 0 \;.$$

Nach der Itô-formel ist

$$f(r(\tau_y^z \wedge t)) = f(x) + \int_0^{\tau_y^z \wedge t} r(s) \exp\{2r(s) + 2(r(s))^{-1}\} \,\mathrm{d}W_s \;.$$

Da der Integrand auf $[y, z]$ beschränkt ist, ist die linke Seite ein Martingal.

b) Nach der Itô-Formel erhalten wir

$$f^2(r(\tau_y^z \wedge t)) = f^2(x) + 2\int_0^{\tau_y^z \wedge t} f'(r(s))f(r(s))\, \mathrm{d}W_s + \int_0^{\tau_y^z \wedge t} g(r(s))\, \mathrm{d}s \;,$$

wobei

$$g(r) = [2(1-r^2)f'(r)f(r) + [f''(r)f(r) + (f'(r))^2]r^2 = (f'(r))^2 r^2 \;.$$

Letzterer Ausdruck ist von 0 wegbeschränkt und das stochastische Integral ist ein Martingal, da der Integrand auf $[y,z]$ beschränkt bleibt. Somit ist

$$\mathbb{E}[f^2(r(\tau_y^z \wedge t))] = f^2(x) + \mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau_y^z \wedge t} g(r(s))\, \mathrm{d}s\Big] \;.$$

Lassen wir $t \to \infty$, so bleibt die linke Seite beschränkt. Somit muss die rechte Seite auch beschränkt bleiben. Dies ist nur möglich, falls τ_y^z (f.s.) endlich ist.

c) Da der Prozess auf $[y,z]$ beschränkt bleibt, haben wir

$$f(x) = f(z)\mathbb{P}[\tau^z < \tau_y] + f(y)\mathbb{P}[\tau_y < \tau^z] = f(z)(1 - \mathbb{P}[\tau_y < \tau^z]) + f(y)\mathbb{P}[\tau_y < \tau^z] \;.$$

Dies ergibt

$$\mathbb{P}[\tau_y < \tau^z] = \frac{f(z) - f(x)}{f(z) - f(y)} \;.$$

Lassen wir $y \searrow 0$, erhalten wir wegen $f(y) \to -\infty$, $\mathbb{P}[\tau_0 < \tau^z] = 0$. Mittels $z \to \infty$ folgt die Aussage.