Nachklausur 24.9.2019

1. Ein Markt ist gegeben durch $\boldsymbol{q} = (3,6)^\top$ und die möglichen Preise zur Zeit 1 durch

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} .$$

Ein Händler hat das Einkommen $\boldsymbol{e} = (1,0,2)$ und die Nutzenfunktion

$$U(\boldsymbol{c}) = \log(1+c_1) + \log(1+c_2) + \log(1+c_3) .$$

Finden Sie alle optimalen Portfolios.
Hinweis: In der Notation des Skriptes erhält man die Lösung $\lambda = 0.7$, die Sie verwenden dürfen, wenn Sie $\boldsymbol{\theta}$ als Funktion von λ berechnet haben.

2. Eine Investorin glaubt, dass sich der Markt bis zur deterministischen Zeit τ positiv entwickeln wird, sieht aber danach Risiken. Sie möchte deshalb den Wert einer Aktie zur Zeit τ schon heute absichern. Sie verwendet das Black–Scholes Modell und will daher eine Option mit Wert $(S_T - \mathrm{e}^{r(T-\tau)} S_\tau)^+$ erwerben, wobei $T > \tau$.

a) (8 Punkte) Berechnen Sie den Wert der Option zur Zeit $t \le \tau$.
Hinweis: Bestimmen Sie zuerst den Preis zur Zeit τ.

b) (4 Punkte) Wie sieht die Hedging-Strategie für $t \le \tau$ aus?

3. Wir betrachten den Prozess $\{r(t)\}$, gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}r(t) = [1 - (r(t))^{1/3}]\,\mathrm{d}t + (r(t))^{2/3}\,\mathrm{d}W_t , \qquad r(0) = x ,$$

für eine Brownsche Bewegung $\{W_t\}$ und $x > 0$. Weiter sei

$$f(u) = \int_1^u v^2 \exp\{6v^{-1/3}\}\,\mathrm{d}v .$$

Wir bezeichnen mit $\tau^z = \inf\{t > 0 : r(t) > z\}$ und mit $\tau_y = \inf\{t > 0 : r(t) < y\}$ die Zeiten, zu denen das erste Mal z bzw. y erreicht wird. Wir nehmen $0 < y < x < z$ an. Sei $\tau_y^z = \tau_y \wedge \tau^z$.

a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $\{M_t\}$ für $M_t = f(r(\tau_y^z \wedge t))$ ein Martingal ist.

b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass τ_y^z fast sicher endlich ist.
Hinweis: Betrachten Sie den Prozess $[f(r(\tau_y^z \wedge t))]^2$.

c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass der Wert 0 nie erreicht wird.