Lösung der Nachklausur

1. Die Nutzenfunktion ist konkav und differenzierbar, mit der Ableitung

$$\partial U(\boldsymbol{c}) = \Big(\frac{1}{1+c_1}, \frac{1}{1+c_2}, \frac{1}{1+c_3}\Big) .$$

Für ein optimales Portfolio gilt $\boldsymbol{\theta q} = 0$, also

$$3\theta_1 + 6\theta_2 = 0 ,$$

also $\theta_1 = -2\theta_2$. Somit haben wir

$$\boldsymbol{c} = (1 - 4\theta_2, -2\theta_2, 2 + \theta_2) .$$

Damit $\boldsymbol{c} \geq 0$, muss $\theta_2 \in [-2, 0]$ gelten. Weiter gibt es ein $\lambda > 0$, so dass $\lambda \partial U(\boldsymbol{c})^\top$ ein State-Price-Vektor ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} 3 &= \lambda\Big(\frac{4}{2-4\theta_2} + \frac{2}{1-2\theta_2} + \frac{4}{3+\theta_2}\Big) = \lambda\Big(\frac{4}{1-2\theta_2} + \frac{4}{3+\theta_2}\Big) , \\ 6 &= \lambda\Big(\frac{4}{2-4\theta_2} + \frac{2}{1-2\theta_2} + \frac{9}{3+\theta_2}\Big) = \lambda\Big(\frac{4}{1-2\theta_2} + \frac{9}{3+\theta_2}\Big) . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$3\lambda^{-1} = \frac{5}{3+\theta_2} ,$$

oder

$$\theta_2 = \frac{5\lambda - 9}{3} \in [-2, 0] .$$

Somit muss $\lambda \in [\frac{3}{5}, \frac{9}{5}]$ gelten. Wir haben weiter

$$3 = \lambda\Big(\frac{12}{21-10\lambda} + \frac{12}{5\lambda}\Big) = \frac{12\lambda}{21-10\lambda} + \frac{12}{5}$$

gelten, also $\lambda = \frac{7}{10}$. Einsetzen ergibt das Portfolio $(22/6, -11/6)$ und den Konsum $(25/3, 11/3, 1/6)$. Der Nutzen wird

$$\log(28/3) + \log(14/3) + \log(7/6) \approx 3.92819 .$$

Wir müssen noch die Randwerte überprüfen. Für $\theta_2 = -2$ ist der Nutzen $\log(10) + \log(5) + \log(1) \approx 3.91202$, und für $\theta_2 = 0$, $\log(2) + \log(1) + \log(3) \approx 1.79176$. Somit ist $(22/6, -11/6)$ das einzige optimale Porfolio.

2. a) Zur Zeit τ handelt es sich um eine Call-Option mit Strike Preis $K = \mathrm{e}^{r(T-\tau)} S_\tau$. Die Parameter in der Black–Scholes Formel sind

$$d_{1/2} = \frac{\log(S_\tau/(\mathrm{e}^{r(T-\tau)}S_\tau)) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}} = \pm\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-\tau} .$$

Somit ist der Preis zur Zeit τ

$$V(\tau, S_\tau) = S_\tau(\Phi(d_1) - \Phi(d_2)) = S_\tau\Bigl(2\Phi\Bigl(\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-\tau}\Bigr) - 1\Bigr) .$$

Zur Zeit $t \le \tau$ erhalten wir somit den Preis

$$V(t, S_t) = \mathbb{E}^*\Bigl[e^{-r(\tau-t)}S_\tau\Bigl(2\Phi\Bigl(\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-\tau}\Bigr) - 1\Bigr) \Bigm| \mathcal{F}_t\Bigr] = S_t\Bigl(2\Phi\Bigl(\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-\tau}\Bigr) - 1\Bigr) .$$

b) Die Hedging-Strategie ist

$$\phi_t = \frac{\partial S_t}{\partial V}(t, S_t) = \Bigl(2\Phi\Bigl(\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-\tau}\Bigr) - 1\Bigr) .$$

Da $\phi_t S_t = V(t, S_t)$, folgt $\phi_t^0 = 0$. Nach dem Zeitpunkt τ muss die Hedging-Strategie der Call-Option angewendet werden.

3. a) Wir erhalten die Ableitungen

$$f'(u) = u^2 \exp\{6u^{-1/3}\} , \qquad f''(u) = (2u - 2u^{2/3}) \exp\{6u^{-1/3}\} .$$

Wir haben dann

$$(1 - u^{1/3})f'(u) + \tfrac{1}{2}u^{4/3}f''(u) = 0 .$$

Nach der Itô-formel ist

$$f(r(\tau_y^z \wedge t)) = f(x) + \int_0^{\tau_y^z \wedge t} (r(s))^2 \exp\{6(r(s))^{-1/3}\}(r(s))^{2/3} \, dW_s .$$

Da der Integrand auf $[y, z]$ beschränkt ist, ist die linke Seite ein Martingal.

b) Nach der Itô-Formel erhalten wir

$$f^2(r(\tau_y^z \wedge t)) = f^2(x) + 2\int_0^{\tau_y^z \wedge t} f'(r(s))f(r(s))r(s)^{2/3} \, dW_s + \int_0^{\tau_y^z \wedge t} g(r(s)) \, ds ,$$

wobei

$$g(r) = [2(1 - r^{1/3})f'(r)f(r) + [f''(r)f(r) + (f'(r))^2]r^{4/3} = (f'(r))^2 r^{4/3} .$$

Letzterer Ausdruck ist von 0 wegbeschränkt und das stochastische Integral ist ein Martingal, da der Integrand auf $[y, z]$ beschränkt bleibt. Somit ist

$$\mathbb{E}[f^2(r(\tau_y^z \wedge t))] = f^2(x) + \mathbb{E}\Bigl[\int_0^{\tau_y^z \wedge t} g(r(s)) \, ds\Bigr] .$$

Lassen wir $t \to \infty$, so bleibt die linke Seite beschränkt. Somit muss die rechte Seite auch beschränkt bleiben. Dies ist nur möglich, falls τ_y^z (f.s.) endlich ist.

c) Da der Prozess auf $[y, z]$ beschränkt bleibt, haben wir

$$f(x) = f(z)\mathbb{P}[\tau^z < \tau_y] + f(y)\mathbb{P}[\tau_y < \tau^z] = f(z)(1 - \mathbb{P}[\tau_y < \tau^z]) + f(y)\mathbb{P}[\tau_y < \tau^z] .$$

Dies ergibt

$$\mathbb{P}[\tau_y < \tau^z] = \frac{f(z) - f(x)}{f(z) - f(y)} .$$

Lassen wir $y \searrow 0$, erhalten wir wegen $f(y) \to -\infty$, $\mathbb{P}[\tau_0 < \tau^z] = 0$. Mittels $z \to \infty$ folgt die Aussage.