A. Stochastische Prozesse und Stoppzeiten

In dieser Vorlesung arbeiten wir immer auf einem Massraum $(\Omega, \mathcal{F})$, der gross genug ist, um alle definierten Objekte zu tragen. Ist nichts anderes gesagt, ist der Raum mit einem Wahrscheinlichkeitsmass $\mathbb{P}$ versehen. Wir nehmen an, dass $\mathcal{F}$ vollständig ist, das heisst, alle Mengen A enthält, für die es ein $B \in \mathcal{F}$ gibt, so dass $A \subset B$ und $\mathbb{P}[B] = 0$.

A.1. Stochastische Prozesse

Wir werden in dieser Vorlesung stochatische Prozesse sowohl in diskreter Zeit als auch in stetiger Zeit betrachten. Sei daher $I = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (diskrete Zeit) oder $I = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ (stetige Zeit).

Definition A.1. *Ein* **stochastischer Prozess** *ist eine Familie $X = \{X_t\}_{t \in I}$ von Zufallsvariablen in $\mathbb{R}^d$. Ist $I = \mathbb{R}_+$ so heisst ein stochastischer Prozess* **cadlag**, *falls die Abbildung $t \mapsto X_t$ fast sicher rechtsstetig ist und alle Grenzwerte $X_{t-} = \lim_{s \uparrow t} X_s$ existieren. Ist X cadlag, so schreiben wir $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$.*

Falls nichts anderes gesagt wird, nehmen wir in dieser Vorlesung an, dass alle stochastischen Prozesse in stetiger Zeit cadlag sind. Im weiteren werden wir den Ausdruck “fast sicher” weglassen, das heisst, alle Aussagen gelten mit Wahrscheinlichkeit 1 und nicht unbedingt für alle $\omega \in \Omega$.

Definition A.2. *Eine wachsende Familie $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ von σ-Algebren mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ heisst* **Filtration**. *Wir nehmen an, dass die Filtration vollständig ist, das heisst, dass $\mathcal{F}_0$ alle Mengen $A \in \mathcal{F}$ enthält, für die $\mathbb{P}[A] = 0$. Ist $I = \mathbb{R}_+$, so heisst eine Filtration* **rechtsstetig**, *falls $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$. Sei X ein stochastischer Prozess (in diskreter oder stetiger Zeit). Ein stochastischer Prozess heisst* **adaptiert**, *falls für alle t die Variable X_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist. Die kleinste (rechtsstetige) Filtration, so dass X adaptiert ist, heisst* **natürliche Filtration** *und wird mit $\{\mathcal{F}_t^X\}$ bezeichnet.*

Es ist einfach zu sehen, dass $\mathcal{F}_{t+}$ eine σ-Algebra ist. Nehmen wir den Durchschnitt aller rechtsstetigen Filtrationen, für die X adaptiert ist, erhalten wir eine rechtsstetige Filtration. Daher existiert $\{\mathcal{F}_t^X\}$.

A.2. Stoppzeiten

Definition A.3. *Sei $\{\mathcal{F}_t\}$ eine Filtration. Eine $\{\mathcal{F}_t\}$-***Stoppzeit** *ist eine $I \cup \{\infty\}$-wertige Zufallsvariable T, so dass $\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \in I$. Falls die Filtration gegeben ist, sagen wir kurz Stoppzeit.*

Sei $I = \mathbb{R}_+$. Ist T eine Stoppzeit, dann ist $\{T \le t - 1/n\} \in \mathcal{F}_{t-1/n} \subset \mathcal{F}_t$ und deshalb

$$\{T < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{T \le t - 1/n\} \in \mathcal{F}_t \,.$$

Falls $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle t, dann ist für jedes $s > t$

$$\{T \le t\} \subset \{T < s\} \in \mathcal{F}_s \,.$$

Daher ist T eine $\{\mathcal{F}_{t+}\} = \{\mathcal{F}_t\}$-Stoppzeit.

Die letzte Aussage gilt nicht für diskrete Zeit. Da $\{T < t\} = \{T \le t - 1\}$, gilt für jede Stoppzeit $\{T < t\} \in \mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}_t$. Wir können aber nicht daraus schliessen, dass aus $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ folgt, dass T eine Stoppzeit ist. Im Gegenteil, $\{T \le t\} = \{T < t + 1\} \in \mathcal{F}_{t+1}$ ist nicht notwendigerweise in $\mathcal{F}_t$.

Sei $T = t_0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Dann ist

$$\{T \le t\} = \{t_0 \le t\} = \begin{cases} \Omega & \text{falls } t_0 \le t, \\ \emptyset & \text{falls } t_0 > t \end{cases}$$

und somit $\{T \le t\} \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_t$. Daher ist $T = t_0$ eine Stoppzeit.

Sind S und T Stoppzeiten, dann sind auch $S + T$, $S \wedge T$ und $S \vee T$ Stoppzeiten. In der Tat,

$$\{S + T > t\} = \underbrace{\{S > t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cup \Big(\bigcup_{\substack{0 \le u \le t \\ u \in \mathbb{Q}}} (\underbrace{\{S > u\}}_{\in \mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{T > t - u\}}_{\in \mathcal{F}_{t-u} \subset \mathcal{F}_t}) \Big) \in \mathcal{F}_t \,,$$

$$\{S \wedge T \le t\} = \{S \le t\} \cup \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t \,, \qquad \{S \vee T \le t\} = \{S \le t\} \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t \,.$$

Definition A.4. *Sei T eine Stoppzeit. Die σ-Algebra der Ereignisse bis zur Stoppzeit T ist*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t \; \forall t \in \mathbb{R}_+\} \,.$$

Man kann zeigen, dass $\mathcal{F}_T$ wirklich eine σ-Algebra ist.

Hilfssatz A.5. *Seien S und T Stoppzeiten und $A \in \mathcal{F}_S$. Dann ist*

$$A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T \ .$$

Insbesondere ist $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$. Weiter gilt $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \wedge T}$.

Beweis. Wir schreiben

$$(A \cap \{S \leq T\}) \cap \{T \leq t\} = \underbrace{(A \cap \{S \leq t\})}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \cap \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \ .$$

Wir müssen also noch zeigen, dass $\{T \wedge t < S \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$. Dies folgt aus

$$\{T \wedge t < S \wedge t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_+} \underbrace{\{T \wedge t \leq q \wedge t < S \wedge t\}}_{\in \mathcal{F}_{q \wedge t} \subset \mathcal{F}_t} \ .$$

Sei $A \in \mathcal{F}_{T \wedge S}$. Dann folgt aus dem soeben Bewiesenen

$$A = A \cap \{S \wedge T \leq T\} \in \mathcal{F}_T$$

und analog $A \in \mathcal{F}_S$. Sei $A \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$. Dann ist

$$A \cap \{S \wedge T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cup (A \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$$

und $A \in \mathcal{F}_{T \wedge S}$ folgt. Schliesslich gilt

$$\{S \leq T\} = \{S \leq (T \wedge S)\} \in \mathcal{F}_{T \wedge S} \ .$$

□

Hilfssatz A.6. *Sei X ein adaptierter (cadlag) stochastischer Prozess und B eine Borel-Menge.*

i) *Falls $I = \mathbb{N}$, dann ist $T = \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\}$ eine Stoppzeit.*

ii) *Falls $I = \mathbb{R}_+$ und B offen ist, dann ist $T = \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\}$ eine Stoppzeit.*

iii) *Sei $I = \mathbb{R}_+$. Falls B kompakt ist oder falls $d = 1$ und $B = [u, \infty)$, dann ist $T = \inf\{t \geq 0 : X_t \in B$ oder $X_{t-} \in B\}$ eine Stoppzeit.*

Beweis. i) Wir haben

$$\{T = n\} = \{X_n \in B\} \bigcap \Big(\bigcap_{i=0}^{n-1} \{X_i \notin B\}\Big) \subset \mathcal{F}_n \,.$$

Daher ist $\{T \le n\} = \cup_{i=0}^n \{T = i\} \in \mathcal{F}_n$.
ii) Sei $\Omega' = \{\omega : X(\omega) \text{ ist cadlag}\}$. Da $\mathbb{P}[\Omega'] = 1$ ist $\Omega' \in \mathcal{F}_0$. Daher können wir $\Omega = \Omega'$ annehmen. Wegen der Rechtsstetigkeit und da B offen ist, gilt

$$\{T < t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t)} \{X_s \in B\} \in \mathcal{F}_t \,.$$

Daher ist $\{T \le t\} = \{T < t\} \cup \{X_t \in B\} \in \mathcal{F}_t$ und T eine $\mathcal{F}_t$-Stoppzeit.
iii) Für $\varepsilon > 0$ definieren wir die ε-Umgebung $B_\varepsilon = \{x : \inf\{|x - y| : y \in B\} < \varepsilon\}$. Da X cadlag ist, gilt

$$\{T \le t\} = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,1)} \Big(\bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t)} \{X_s \in B_\varepsilon\}\Big) \cup \{X_t \in B\} \in \mathcal{F}_t \,.$$

Daher ist T eine Stoppzeit. □

Definition A.7. *Ein adaptierter stochastischer Prozess* $\{Y_t\}$ *heisst* **stückweise konstanter Prozess***, falls er in der Form*

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} Y_{\tau_i} \mathbb{1}_{[\tau_i, \tau_{i+1})}(t)$$

geschrieben werden kann, wobei $\{\tau_n\}$ *eine wachsende Folge von Stoppzeiten ist mit* $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots$ *und* $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$. *Die Variablen* Y_{τ_n} *sind* $\mathcal{F}_{\tau_n}$*-messbar.*

A.3. Prozesse von beschränkter Variation

Wir betrachten hier Prozesse in stetiger Zeit.

Definition A.8. *Sei* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *eine cadlag Funktion. Wir definieren die* **Variation** *von* f *als*

$$V(f)_t = |f(0)| + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |f(tk/n) - f(t(k-1)/n)| \,.$$

Wir sagen, f *hat* **beschränkte Variation***, falls* $V(f)_t < \infty$ *für alle* $t \ge 0$.

Man kann zeigen, dass der Grenzwert in $[0, \infty]$ existiert. Ein stückweise konstanter Prozess ist immer von beschränkter Variation (da cadlag, müssen die Sprünge auf endlichen Intervallen addierbar sein).

Hilfssatz A.9. *Sei f eine Funktion von beschränkter Variation. Dann gibt es ein eindeutiges Paar (g, h) von positiven wachsenden Funktionen, so dass $f = g - h$ und $V(f) = g + h$.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $f(0) = 0$. Sei

$$g_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{f(ti/n)>f(t(i-1)/n)}(f(ti/n) - f(t(i-1)/n)) ,$$
$$h_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{f(ti/n)<f(t(i-1)/n)}(f(t(i-1)/n) - f(ti/n)) .$$

Es ist klar, dass $g_n(t) - h_n(t) = f(t)$, und dass $\lim_{n\to\infty} g_n(t) + h_n(t) = V(f)_t$. Wir wollen zeigen, dass g_n und h_n konvergieren. Die Folgen $g_{2^n}(t)$ und $h_{2^n}(t)$ sind wachsend in n und durch $V(f)_t$ beschränkt. Daher existieren die Grenzwerte $g(t)$ und $h(t)$, und es gilt $V(f)_t = g(t)+h(t)$. Sei nun k_n eine Folge, so dass $\lim_{n\to\infty} g_{k_n}(t)$ existiert. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} h_{k_n}(t) = V(f)_t - \lim_{n\to\infty} g_{k_n}(t) .$$

Es folgt einfach, dass $g_{2^n k_n}(t) \ge g_{2^n}(t)$ und $h_{2^n k_n}(t) \ge h_{2^n}(t)$. Da

$$\lim_{n\to\infty} g_{2^n k_n}(t) + h_{2^n k_n}(t) = V(f)_t$$

muss jede konvergente Teilfolge gegen $g(t)$, beziehungsweise gegen $h(t)$ konvergieren. Das gleiche Argument zeigt, dass $g_{2^n k_n}(t)$ gegen $\lim_{n\to\infty} g_{k_n}(t)$ konvergiert. Daher ist $\lim_{n\to\infty} g_{k_n}(t) = g(t)$. Da f cadlag ist, folgt sofort, dass g und h cadlag sind. Es ist klar, dass g und h wachsend sind.

Sei nun (g_0, h_0) ein weiteres Paar mit $f = g_0 - h_0$ und $V(f) = g_0 + h_0$. Dann ist

$$h_0 = g_0 - f = g_0 - g + h$$

und

$$g_0 = V(f) - h_0 = g + h - (g_0 - g + h) = 2g - g_0 .$$

Das beweist, dass $g_0 = g$ und $h_0 = h$. □

Hilfssatz A.10. *Sei f eine Funktion von beschränkter Variation und*

$$A = \{(g, h) : g, h \text{ wachsende positive Funktionen, } f = g - h\} .$$

Sei $g_0 = \inf_A g$ und $h_0 = \inf_A h$. Dann gilt $(g_0, h_0) \in A$ und $V(f) = g_0 + h_0$.

Beweis. Es ist klar, dass g_0 und h_0 wachsend sind. Da $h = g - f$ folgt $(g_0, h_0) \in A$. Es folgt sofort, dass $g_0(0) = (f(0))^+$ und $h_0(0) = (f(0))^-$. Wir können also im weiteren annehmen, dass $f(0) = 0$. Seien nun g_n, h_n die Funktionen, die im Beweis von Hilfssatz A.9 konstruiert wurden. Setzen wir $\alpha_i = g_0(ti/n) - g_0(t(i-1)/n)$ und $\beta_i = h_0(ti/n) - h_0(t(i-1)/n)$. Dann haben wir

$$g_n(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\alpha_i > \beta_i}(\alpha_i - \beta_i) \le \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\alpha_i > \beta_i}\alpha_i \le \sum_{i=1}^n \alpha_i = g_0(t) \; .$$

Daher gilt $\lim_{n\to\infty} g_n(t) \le g_0(t)$. Somit muss $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = g_0(t)$ gelten. □

Beispiel A.11. Sei $f(t) = \int_0^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s$ eine absolut stetige Funktion. Dann sind $g(t) = \int_0^t (\alpha(s))^+\,\mathrm{d}s$ und $h(t) = \int_0^t (\alpha(s))^-\,\mathrm{d}s$. ■

A.4. Quadratische Variation

Definition A.12. *Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine cadlag Funktion. Die* **quadratische Variation** *ist definiert als*

$$Q(f)_t = f^2(0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n [f(tk/n) - f(t(k-1)/n)]^2 \; .$$

Wir sagen f hat **beschränkte quadratische Variation***, falls $Q(f)_t < \infty$ für alle t.*

Man kann zeigen, dass der Grenzwert in $[0, \infty]$ existiert.

Hilfssatz A.13. *Sei f eine Funktion von beschränkter Variation. Dann ist*

$$Q(f)_t = \sum_{s \le t} (\Delta f(s))^2 \; ,$$

wobei $\Delta f(s) = f(s) - f(s-)$ und $f(0-) = 0$.

Beweis. Wir können annehmen, dass $f(0) = 0$. Nehmen wir zuerst an, dass f stetig ist. Dann ist f auf $[0, t]$ gleichmässig stetig. Für n gross genug ist $|f(t_i) - f(t_{i-1})| < \varepsilon$, wobei $t_i = ti/n$. Somit haben wir

$$\sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 \le \varepsilon \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \; .$$

Das bedeutet, dass $Q(f)_t \le \varepsilon V(f)_t$. Da ε beliebig war, haben wir $Q(f)_t = 0$.

Falls f nicht stetig ist, bemerken wir zuerst, dass $V(f)_t \ge \sum_{s\le t} |\Delta f(s)|$, und

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sum_{s\le t} |\Delta f(s)| \mathbb{1}_{|\Delta f(s)|<\varepsilon} = 0 \; .$$

Sei

$$g_\varepsilon(t) = f(t) - \sum_{s\le t} \Delta f(s) \mathbb{1}_{|\Delta f(s)|<\varepsilon} \; ,$$

das heisst, wir entfernen alle Sprünge, die kleiner als ε sind. Sei $h_\varepsilon = f - g_\varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned}(f(t_k) - f(t_{k-1}))^2 = (g_\varepsilon(t_k) - g_\varepsilon(t_{k-1}))^2 + (h_\varepsilon(t_k) - h_\varepsilon(t_{k-1}))^2 \\ + 2(g_\varepsilon(t_k) - g_\varepsilon(t_{k-1}))(h_\varepsilon(t_k) - h_\varepsilon(t_{k-1})) \; .\end{aligned}$$

Wir haben $|h_\varepsilon(t_k) - h_\varepsilon(t_{k-1})| \le V(h_\varepsilon)_t$ und

$$\sum_{k=1}^n (h_\varepsilon(t_k) - h_\varepsilon(t_{k-1}))^2 \le \sum_{k=1}^n |h_\varepsilon(t_k) - h_\varepsilon(t_{k-1})| V(h_\varepsilon)_t \; .$$

Somit ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^n (h_\varepsilon(t_k) - h_\varepsilon(t_{k-1}))^2 \le (V(h_\varepsilon)_t)^2 \; .$$

Da ε beliebig ist, kann die rechte Seite beliebig klein gemacht werden. Weiter gilt

$$\sum_{k=1}^n |(g_\varepsilon(t_k) - g_\varepsilon(t_{k-1}))(h_\varepsilon(t_k) - h_\varepsilon(t_{k-1}))| \le \sum_{k=1}^n |g_\varepsilon(t_k) - g_\varepsilon(t_{k-1})| V(h_\varepsilon)_t \; ,$$

woraus

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^n |(g_\varepsilon(t_k) - g_\varepsilon(t_{k-1}))(h_\varepsilon(t_k) - h_\varepsilon(t_{k-1}))| \le V(g_\varepsilon)_t V(h_\varepsilon)_t \; .$$

Hier kann die rechte Seite auch beliebig klein gemacht werden. Wir schliessen daraus, dass $Q(f)_t = \lim_{\varepsilon\to 0} Q(g_\varepsilon)_t$. Da f nur endlich viele Sprünge hat, die grösser als ε sind, folgt dass, für n gross genug, jedes interval $(t_{k-1}, t_k]$ höchstens einen Sprung von g_ε enthält. Damit folgt

$$Q(g_\varepsilon) = \sum_{s\le t} (\Delta g(s))^2 = \sum_{s\le t} \mathbb{1}_{|\Delta f(s)|\ge\varepsilon} (\Delta f(s))^2 \; .$$

Lässt man $\varepsilon \to 0$ folgt das Resultat. $\square$

B. Die Brownsche Bewegung

Sei $I = \mathbb{R}_+$.

Definition B.1. *Ein (cadlag) stochastischer Prozess B auf $\mathbb{R}$ heisst standard* **Brownsche Bewegung**, *falls*

i) $B_0 = 0$,

ii) *B unabhängige Zuwächse hat und*

iii) *$B_{t+s} - B_s$ normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz t ist.*

Ein d-dimensionaler Prozess B, wobei (B^i) unabhängige Brownsche Bewegungen sind, heisst **d-dimensionale Brownsche Bewegung**.

Man kann zeigen (Wiener, 1923), dass es einen Wahrscheinlichkeitsraum gibt, auf dem eine Brownsche Bewegung existiert. Man kann weiter zeigen, dass eine Brownsche Bewegung stetige Pfade hat, und dass die Pfade nirgends differenzierbar sind. Die Vorraussetzung der cadlag Pfade ist wichtig.

Hilfssatz B.2. *Sei B eine Brownsche Bewegung und $W_t = tB_{1/t}$ falls $t > 0$. Wir setzen $W_0 = 0$. Dann ist W eine Brownsche Bewegung.*

Beweis. Wir müssen zuerst zeigen, dass W in 0 stetig ist. Wir haben

$$W_{1/n} = \frac{1}{n} B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (B_i - B_{i-1}) \; .$$

Das starke Gesetz der grossen Zahl zeigt, dass $\lim_{n\to\infty} W_{1/n} = 0$. Weiter haben wir

$$W_{1/t} = \frac{1}{t}(B_{\lfloor t \rfloor} + (B_t - B_{\lfloor t \rfloor})) \; .$$

Wir müssen daher zeigen, dass $t^{-1}(B_t - B_{\lfloor t \rfloor})$ gegen Null konvergiert. Sei $\{t_n\}$ eine Folge, die gegen Unendlich konvergiert. Wir können annehmen (Teilfolge), dass $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(-\sqrt{t_n}) < \infty$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[|B_{t_n} - B_{\lfloor t_n \rfloor}| > \sqrt{t_n}] = 2\Phi\Big(-\frac{\sqrt{t_n}}{\sqrt{t_n - \lfloor t_n \rfloor}}\Big) \le 2\Phi(-\sqrt{t_n}) \; .$$

Das Lemma von Borel–Cantelli besagt, dass $\{|B_{t_n} - B_{\lfloor t_n \rfloor}| > \sqrt{t_n}\}$ nur endlich oft eintritt. Dies zeigt, dass $\lim_{t\to 0} W_t = 0$. Insbesondere ist W cadlag.

Da B unabhängige Zuwächse hat, hängt für $s > t$ der Zuwachs $W_s - W_t$ von der Vorgeschichte nur von W_t ab. Wir zeigen nun, dass $W_s - W_t$ bedingt auf $B_{1/t}$ eine $\mathcal{N}(0, s-t)$ Verteilung hat. Dann hat W insbesondere unabhängige Zuwächse. Die gemeinsame Dichte von $(B_{1/t}, B_{1/s})$ ist

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1/s(1/t-1/s)}} \exp\Bigl\{-\tfrac{1}{2}\Bigl(\frac{y^2}{1/s} + \frac{(x-y)^2}{1/t-1/s}\Bigr)\Bigr\} \;.$$

Somit wird die bedingte Dichte von $B_{1/s}$ gegeben $B_{1/t} = x$

$$\sqrt{\frac{s^2}{2\pi(s-t)}} \exp\Bigl\{-\frac{s^2}{2(s-t)}\Bigl(y - \frac{xt}{s}\Bigr)^2\Bigr\} \;.$$

Das heisst, die bedingte Verteilung von $B_{1/s}$ ist eine Normalverteilung mit Mittelwert $tB_{1/t}/s$ und Varianz $(s-t)/s^2$. Für die momentenerzeugende Funktion erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp\{r(sB_{1/s} - tB_{1/t})\} \mid B_{1/t}] &= \exp\{rstB_{1/t}/s + \tfrac{1}{2}r^2s^2(s-t)/s^2 - rtB_{1/t}\} \\ &= \mathrm{e}^{r^2(s-t)/2} \;.\end{aligned}$$

Somit hat W_t die geforderte Verteilung. □

Hilfssatz B.3. *Eine Brownsche Bewegung hat in jedem Interval* $[0, \varepsilon]$ *unendlich viele Nullstellen.*

Beweis. Betrachten wir die Brownsche Bewegung $W = \{tB_{1/t}\}$. Wir müssen daher zeigen, dass $\{W_t\}$ auf dem Interval $[1/\varepsilon, \infty)$ unendliche viele Nullstellen hat. Da der Prozess $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Irrfahrt ist, folgt $-\varliminf_{t\to\infty} W_t = \varlimsup_{t\to\infty} W_t = \infty$. Da W stetig ist, muss W unendlich viele Nullstellen haben. □

Hilfssatz B.4. *Die Brownsche Bewegung hat quadratische Variation* $Q(B)_t = t$, *und damit unendliche Variation.*

Beweis. Sei $t_k = tk/n$. Wir wissen, dass $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ normalverteilt ist mit Varianz t/n. Wegen der unabhängigen Zuwächse haben wir für $h > k$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\{(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - t/n\}\{(B_{t_h} - B_{t_{h-1}})^2 - t/n\}] \\ &\qquad = \mathbb{E}[\{(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - t/n\}\mathbb{E}[(B_{t_h} - B_{t_{h-1}})^2 - t/n \mid \mathcal{F}_{t_k}]] = 0 \;.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})^2-t\Big)^2\Big]=\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{n}\{(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})^2-t/n\}^2\Big]=2nt/n^2\ .$$

Wir sehen, dass $\sum_{k=1}^{n}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})^2$ in $\mathcal{L}^2$, daher fast sicher gegen t konvergiert. Daher ist $Q(B)_t=t$. Dass $V(B)_t=\infty$ folgt aus Hilfssatz A.13. □

C. Martingale

Definition C.1. *Ein (cadlag) Prozess M heisst $\{\mathcal{F}_t\}$-**Submartingal** falls*

i) *M ist adaptiert,*

ii) $\mathbb{E}[|M_t|]<\infty$,

iii) $\mathbb{E}[M_t\mid\mathcal{F}_s]\ge M_s$ *für alle $s\le t$.*

*M heisst $\{\mathcal{F}_t\}$-**Supermartingal** falls $\{-M_t\}$ ein Submartingal ist. Ist M sowohl ein Sub- als auch ein Supermartingal, so nennt man M ein $\{\mathcal{F}_t\}$-**Martingal**. Wir sagen kurz (Sub-, Super-)Martingal, falls M ein (Sub-, Super-)Martingal bezüglich seiner natürlichen Filtration ist oder die Filtration gegeben ist.*

Beispiel C.2. Sei B eine Brownsche Bewegung und $\{\mathcal{F}_t\}$ die natürliche Filtration. Dann ist für $t\ge s$ $\mathbb{E}[B_t\mid\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}[B_t-B_s\mid\mathcal{F}_s]+B_s=B_s$ und B ist ein Martingal. Der Prozess $\{B_t^2-t\}$ ist ein Martingal, da $\mathbb{E}[B_t^2-t\mid\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}[(B_t-B_s)^2\mid\mathcal{F}_s]+2B_s\mathbb{E}[B_t-B_s\mid\mathcal{F}_s]+B_s^2-t=B_s^2-s$. Sei $r>0$. Dann folgt ähnlich, dass $\{\exp\{rB_t-r^2t/2\}\}$ ein Martingal ist. ■

Das folgende Kriterium ist oft nützlich.

Hilfssatz C.3. *Sei $I=\mathbb{N}$. Ein Prozess M ist genau dann ein Martingal, falls für jeden vorhersehbaren Prozess $\{H_n\}$ (das heisst H_n ist $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar) und jedes $N\in\mathbb{N}$*

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{N}H_n(M_n-M_{n-1})\Big]=0 \tag{C.1}$$

gilt.

Beweis. Sei M ein Martingal. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{N} H_n(M_n - M_{n-1}) \,\Big|\, \mathcal{F}_{N-1}\Big] \\
&\qquad = \sum_{n=1}^{N-1} H_n(M_n - M_{n-1}) + H_N \mathbb{E}[M_N - M_{N-1} \mid \mathcal{F}_{N-1}] \\
&\qquad = \sum_{n=1}^{N-1} H_n(M_n - M_{n-1}) \; .
\end{aligned}$$

(C.1) folgt nun mit Induktion nach N.

Nehmen wir an, dass (C.1) gilt. Sei $A \in \mathcal{F}_j$, $j \in \mathbb{N}$ und $H_n = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{n=j+1}$. Dann gilt $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(M_{j+1} - M_j)] = 0$. Das impliziert $\mathbb{E}[M_{j+1} - M_j \mid \mathcal{F}_j] = 0$, und M ist ein Martingal. □

Die folgenden beiden Sätze sind die Hauptresultate über Martingale.

Satz C.4. (Konvergenzsatz) *Sei M ein Submartingal, so dass $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[M_t^+] < \infty$. Dann existiert $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ fast sicher. Weiter gilt $\mathbb{E}[|M_\infty|] < \infty$.* □

Satz C.5. (optionaler Stoppsatz) *Sei M ein Submartingal und seien T und S Stoppzeiten. Dann gilt für $t > 0$*

$$\mathbb{E}[M_{S\wedge t} \mid \mathcal{F}_T] \geq M_{T\wedge S\wedge t} \, .$$

□

Korollar C.6. *Sei M ein von unten beschränktes Supermartingal. Dann existiert M_∞, $\mathbb{E}[|M_\infty|] < \infty$ und $M_t \geq \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_t]$.*

Beweis. $-M$ erfüllt die Bedingungen des Konvergenzsatzes und somit existiert M_∞. Weiter gilt

$$M_t \geq \lim_{s\to\infty} \mathbb{E}[M_s \mid \mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[\lim_{s\to\infty} M_s \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_t] \; ,$$

wobei wir Fatous Lemma verwendet haben. □

Beispiel C.7. Seien $\sigma, \mu > 0$ und $X_t = \sigma B_t - \mu t$ für eine Brownsche Bewegung B. Da $M_t = \exp\{(2\mu/\sigma^2)X_t\}$ ein von unten beschränktes Martingal ist, existiert M_∞. Da wegen den stationären und unabhängigen Zuwächsen von X die Gleichung $\operatorname{Var}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = M_t^2 \operatorname{Var}[M_1]$ erfüllt ist, muss $M_\infty \in \{0, \infty\}$ gelten. Da $\mathbb{E}[M_\infty]$ existiert, ist nur $M_\infty = 0$ möglich. Somit gilt $\lim_{t\to\infty} \sigma B_t - \mu t = -\infty$. Wir sehen, dass das Martingal nicht gleichmässig integrierbar ist. Nämlich,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0] = 1 \neq 0 = \mathbb{E}[\lim_{t\to\infty} M_t] .$$

■

Beispiel C.8. Sei X eine integrierbare Zufallsvariable und $M_t = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$. Dann gilt für $t > s$

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_s] = M_s$$

und M ist ein Martingal.

Weiter gilt

$$\mathbb{E}[M_t^+] \le \mathbb{E}[|M_t|] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]|] \le \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[|X|] < \infty$$

und es folgt, dass M_∞ existiert. Wir wollen nun zeigen, dass M gleichmässig integrierbar ist, das heisst, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\ge 0} \mathbb{E}[|M_t| \mathbb{1}_{|M_t|>n}] = 0 . \tag{C.2}$$

Wir schreiben

$$\mathbb{E}[|M_t| \mathbb{1}_{|M_t|>n}] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]| \mathbb{1}_{|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]|>n}] \le \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}_t] \mathbb{1}_{\mathbb{E}[|X||\mathcal{F}_t]>n}]$$

und somit genügt es, positive Zufallsvariablen X zu betrachten. Weiter gilt

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] \mathbb{1}_{M_t>n}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{M_t>n} \mid \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{M_t>n}] .$$

Sei $\overline{M} = \sup_t M_t < \infty$, da M_∞ fast sicher existiert. Dann ist

$$\sup_{t\ge 0} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{M_t>n}] \le \mathbb{E}\Big[X \sup_{t\ge 0} \mathbb{1}_{M_t>n}\Big] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\overline{M}>n}] .$$

Da $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\overline{M}>n}] \le \mathbb{E}[X] < \infty$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\overline{M}>n}] = \mathbb{E}[X \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\overline{M}>n}] = 0 ,$$

und $\{M_t\}$ ist gleichmässig integrierbar.

Wir versuchen nun M_∞ zu bestimmen. Sei $\mathcal{F}_\infty$ die kleinste σ-Algebra, so dass $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty$ für alle t. Dann ist M_t $\mathcal{F}_\infty$-messbar und daher ist M_∞ auch $\mathcal{F}_\infty$-messbar.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[\lim_{s\to\infty} M_s \mid \mathcal{F}_t] = \lim_{s\to\infty} \mathbb{E}[M_s \mid \mathcal{F}_t] = M_t \\ &= \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty] \mid \mathcal{F}_t]\,.\end{aligned}$$

Da $\mathcal{F}_\infty$ von den σ-Algebren $\mathcal{F}_s$ erzeugt ist, muss die obige Gleichung auch für $t = \infty$ gelten. Das bedeutet

$$M_\infty = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_\infty] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty] \mid \mathcal{F}_\infty] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty]\,.$$

■

Proposition C.9. *Sei M ein Submartingal.*

i) *Für $x, T > 0$ gilt*
$$\mathbb{P}\Big[\sup_{0\le t\le T} M_t \ge x\Big] \le x^{-1}\mathbb{E}[M_T^+]\,.$$

ii) *Ist M positiv oder ein Martingal und $\mathbb{E}[M_T^2] < \infty$, dann gilt*
$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} M_t^2\Big] \le 4\mathbb{E}[M_T^2]\,.$$

Beweis. i) Da $\{M_t^+\}$ ein Submartingal ist (Jensens Ungleichung), können wir annehmen, dass M positiv ist. Sei $F \subset [0, T]$ eine endliche Teilmenge. Setzen wir $\tau = \inf\{t \in F : M_t \ge x\}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[M_T 1\!\!1_{\tau\le T}] + \mathbb{E}[M_T 1\!\!1_{\tau>T}] = \mathbb{E}[M_T] \ge \mathbb{E}[M_{\tau\wedge T}] = \mathbb{E}[M_\tau 1\!\!1_{\tau\le T}] + \mathbb{E}[M_T 1\!\!1_{\tau>T}]\,.$$

Dies zeigt

$$\mathbb{E}[M_T 1\!\!1_{\tau\le T}] \ge \mathbb{E}[M_\tau 1\!\!1_{\tau\le T}] \ge x\mathbb{P}[\tau \le T] = x\mathbb{P}\Big[\sup_{t\in F} M_t \ge x\Big]\,.$$

Somit gilt $\mathbb{P}[\sup_{t\in F} M_t \ge x] \le x^{-1}\mathbb{E}[M_T^+]$. Sei nun F abzählbar. Wir wählen eine Folge $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ von endlichen Mengen mit $\cup F_n = F$. Dann folgt aus monotoner Konvergenz für $y < x$,

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{t\in F} M_t \ge x\Big] \le \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big[\sup_{t\in F_n} M_t \ge y\Big] \le y^{-1}\mathbb{E}[M_T^+]\,.$$

Da y beliebig ist, gilt $\mathbb{P}[\sup_{t\in F} M_t \ge x] \le x^{-1}\mathbb{E}[M_T^+]$. Wählen wir $F = \mathbb{Q}$ folgt das Resultat.
ii) Auch hier können wir annehmen, dass M positiv ist, da $\{|M_t|\}$ ein Submartingal ist, falls M ein Martingal ist. Sei $Z = \sup_{0\le t\le T} M_t$. Dann ist für $x > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(Z\wedge x)^2] &= 2\int_0^\infty \int_0^{z\wedge x} y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}F_Z(z) = 2\int_0^x y\mathbb{P}[Z\ge y]\,\mathrm{d}y \le 2\int_0^x \mathbb{E}[M_T \mathbb{1}_{Z\ge y}]\,\mathrm{d}y \\ &= 2\mathbb{E}[M_T(Z\wedge x)] \le 2\mathbb{E}[M_T^2]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}[(Z\wedge x)^2]^{\frac{1}{2}}\ .\end{aligned}$$

Hier benutzten wir ein Teilresultat aus dem Beweis von i) in der ersten Ungleichung, und die Cauchy–Schwarz-Ungleichung in der zweiten Ungleichung. Dies beweist die Behauptung. □

Satz C.10. (Doob-Zerlegung) *Jedes Submartingal $\{U_n\}$ in diskreter Zeit hat eine eindeutige Zerlegung $U_n = M_n + A_n$, wobei $\{M_n\}$ ein Martingal ist, und $\{A_n\}$ ist ein vorhersehbarer wachsender Prozess mit $A_0 = 0$.*

Beweis. Da $A_0 = 0$ haben wir $M_0 = U_0$. Aus

$$A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}[A_{n+1} - A_n \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - U_n$$

folgt

$$A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}[U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - U_n\ ,$$

und die Zerlegung ist eindeutig. Definieren wir $\{A_n\}$ wie oben, so ist $\{A_n\}$ wachsend und vorhersehbar. Für den entsprechenden Prozess $\{M_n\}$ folgt

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - A_{n+1} = U_n - A_n = M_n\ ,$$

und $\{M_n\}$ ist ein Martingal. □

In stetiger Zeit ist die Zerlegung etwas komplizierter. Sei $\mathcal{T}$ die Klasse aller Stoppzeiten. Wir nennen einen Prozess X von der **Klasse DL**, falls für jedes t die Familie $\{X_{t\wedge\tau} : \tau \in \mathcal{T}\}$ gleichmässig integrierbar ist.

Satz C.11. (Doob–Meyer-Zerlegung) *Sei U ein Submartingal der Klasse DL. Dann gibt es ein Martingal M und einen wachsenden Prozess A mit $A_0 = 0$, so dass $U_t = M_t + A_t$ mit der Eigenschaft, dass für jedes positive Martingal V und jede Stoppzeit τ*

$$\mathbb{E}\Bigl[\int_0^{t\wedge\tau} V_{s-}\,\mathrm{d}A_s\Bigr] = \mathbb{E}[V_{t\wedge\tau}A_{t\wedge\tau}]$$

gilt. □

Man kann zeigen, dass ein Martingal immer von der Klasse DL ist.

Definition C.12. *Ein adaptierter stochastischer Prozess M heisst* **lokales Martingal***, falls es eine aufsteigende Folge von Stoppzeiten $\{T_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ gibt, so dass für jedes n der Prozess $\{M_{T_n\wedge t}\}$ ein Martingal ist. Eine solche Folge $\{T_n\}$ nennt man* **Lokalisierungsfolge**.

Es ist klar, dass jedes Martingal ein lokales Martingal ist. Die Umkehrung gilt nicht.

Beispiel C.13. Sei X eine Zufallsvariable, die nicht integrierbar ist ($\mathbb{E}[|X|] = \infty$), und B eine Brownsche Bewegung, die unabhängig von X ist. Sei $M_t = XB_t$. Da $\mathbb{E}[|M_t|] = \infty$ ist M kein Martingal. Betrachten wir die Filtration $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B \vee \sigma(X)$. Sei $T_n = \inf\{t : |M_t| > n\}$. Dann ist $M_{T_n\wedge t}$ beschränkt und daher integrierbar. Wir haben

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = X\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] = XB_s = M_s \;.$$

Daher ist M ein lokales Martingal. ■

Hilfssatz C.14. *Sei M ein von unten beschränktes lokales Martingal. Dann ist M ein Supermartingal.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $M \ge 0$. Sei $\{T_n\}$ eine Lokalisierungsfolge. Wir bemerken, dass $\mathbb{E}[M_0]$ existiert. Dann ist für $t > s$

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} M_{T_n\wedge t} \mid \mathcal{F}_s] \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_{T_n\wedge t} \mid \mathcal{F}_s] = \lim_{n\to\infty} M_{T_n\wedge s} = M_s \,.$$

Insbesondere ist M_t integrierbar. □

Hilfssatz C.15. *Ein stetiges lokales Martingal von beschränkter Variation ist konstant.*

Beweis. Wir können $M_0 = 0$ annehmen. Sei $T = \inf\{t \ge 0 : |M_t| + V(M)_t > 1\}$. Wegen der Stetigkeit ist $|M_T| + V(M)_T = 1$ falls $T < \infty$. Betrachten wir nun den Prozess $\{M_{T\wedge t}\}$. Wegen der Beschränktheit ist dies ein Martingal. Sei $t_i = ti/n$. Es gilt

$$\mathbb{E}[M_{T\wedge t_i} M_{T\wedge t_{i-1}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{T\wedge t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] M_{T\wedge t_{i-1}}] = \mathbb{E}[(M_{T\wedge t_{i-1}})^2] \;.$$

Daher gilt

$$\mathbb{E}[(M_{T\wedge t_i} - M_{T\wedge t_{i-1}})^2] = \mathbb{E}[(M_{T\wedge t_i})^2 - (M_{T\wedge t_{i-1}})^2] \;.$$

Dies impliziert

$$\mathbb{E}[(M_{T\wedge t})^2] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^n (M_{T\wedge t_i})^2 - (M_{T\wedge t_{i-1}})^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^n (M_{T\wedge t_i} - M_{T\wedge t_{i-1}})^2\Big] \;.$$

Da

$$\sum_{k=1}^n (M_{T\wedge t_i} - M_{T\wedge t_{i-1}})^2 \le \sum_{k=1}^n 2|M_{T\wedge t_i} - M_{T\wedge t_{i-1}}| \le 2V(M)_{T\wedge t} \le 2$$

können wir Grenzwert und Integral vertauschen. Wir schliessen, dass

$$\mathbb{E}[(M_{T\wedge t})^2] = \mathbb{E}\Big[\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (M_{T\wedge t_i} - M_{T\wedge t_{i-1}})^2\Big] = 0 \;.$$

Daher gilt $M_{T\wedge t} = 0$. Wir schliessen, dass $M_t = 0$ für $t \le T$. Insbesondere ist $V(M)_{T\wedge t} = 0$ und $|M_{T\wedge t}| + V(M)_{T\wedge t} = 0$. Das bedeutet, dass $T > t$. Also ist $M_t = 0$ für alle t. □

Definition C.16. *Ein* **Semimartingal** *ist ein stochastischer Prozess X von der Form $X = X_0 + M + A$, wobei M ein lokales Martingal ist und A ein Prozess mit beschränkter Variation mit $M_0 = A_0 = 0$.*

Beispiel C.17. Sei B eine standard Brownsche Bewegung. Da $\{B_t^2 - t\}$ ein Martingal ist, ist $\{B_t^2\}$ ein Semimartingal. Betrachten wir nun den Prozess $\{B_t^4\}$. Da

$$\mathbb{E}[B_t^4 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^4 \mid \mathcal{F}_s] = 3(t-s)^2 + 6(t-s)B_s^2 + B_s^4 \;.$$

Betrachten wir $6\int_0^t B_v^2 \,\mathrm{d}v$. Aus Fubinis Theorem schliessen wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[6\int_0^t B_v^2 \,\mathrm{d}v \;\Big|\; \mathcal{F}_s\Big] &= 6\int_0^s B_v^2 \,\mathrm{d}v + 6\int_s^t (B_s^2 + (v-s)) \,\mathrm{d}v \\ &= 6\int_0^s B_v^2 \,\mathrm{d}v + 6(t-s)B_s^2 + 3(t-s)^2 \;.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass

$$\Big\{B_t^4 - 6\int_0^t B_s^2 \,\mathrm{d}s\Big\}$$

ein Martingal ist. Da $6\int_0^t B_s^2 \,\mathrm{d}s$ ein Prozess von beschränkter Variation ist, ist $\{B_t^4\}$ ein Semimartingal. ■

D. Änderung des Masses

Sei $\{\mathcal{F}_t\}$ eine Filtration und betrachten wir einen endlichen Zeithorizont T. Wir nehmen $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ an. Ein äquivalentes Mass $\mathbb{P}^*$ ist dann definiert durch eine Radon–Nikodym-Ableitung $L_T > 0$. Das heisst, ist X $\mathcal{F}_T$-messbar, dann haben wir $\mathbb{E}^*[X] = \mathbb{E}[L_T X]$. Für $X = 1$ erhalten wir $\mathbb{E}[L_T] = 1$.

Ist $0 \le t < T$ und X $\mathcal{F}_t$-messbar, so haben wir

$$\mathbb{E}^*[X] = \mathbb{E}[L_T X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[L_T X \mid \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[L_T \mid \mathcal{F}_t] X] \; .$$

Betrachten wir das Martingal $\{L_t = \mathbb{E}[L_T \mid \mathcal{F}_t]\}$, haben wir also die Formel

$$\mathbb{E}^*[X] = \mathbb{E}[L_t X] \; . \tag{D.1}$$

Ist τ eine Stoppzeit, folgt ähnlich für eine $\mathcal{F}_{\tau\wedge T}$ messbare Variable X, $\mathbb{E}^*[X] = \mathbb{E}[L_{\tau\wedge T} X]$. Wir bemerken, dass $L_0 = \mathbb{E}[L_T \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[L_T] = 1$.

Wir wollen nun die bedingte Erwartung unter $\mathbb{P}^*$ finden. Sei $A \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ und $B \in \mathcal{F}_t$. Dann haben wir

$$\mathbb{P}^*[A \cap B] = \mathbb{E}[L_T \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mathbb{E}[L_T \mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}^*[\mathbb{1}_B \mathbb{E}[L_T \mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t]/L_t] \; .$$

Wir schliessen, dass

$$\mathbb{P}^*[A \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[L_T \mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t]/L_t \; . \tag{D.2}$$

Ist $A \in \mathcal{F}_s$ für $0 \le t < s < T$, so gilt $\mathbb{P}^*[A \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[L_s \mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t]/L_t$. Ist W eine Brownsche Bewegung, dann ist $L_t = \exp\{rW_t - r^2 t/2\}$ ein Martingal. Unter $\mathbb{P}^*$ bleibt $W_0 = 0$ und die Pfade sind stetig. Es folgt dann für $s < t$ und $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*[W_t - W_s \le x \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\exp\{r(W_t - W_s) - r^2(t-s)/2\}\mathbb{1}_{W_t - W_s \le x} \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{ry - r^2(t-s)/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \mathrm{e}^{-y^2/(2(t-s))} \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_0^x \mathrm{e}^{-(y - r(t-s))^2/(2(t-s))} \, \mathrm{d}y \; .
\end{aligned}$$

Somit ist $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und normalverteilt mit Mittelwert $r(t-s)$ Varianz $t-s$. Dies bedeutet, dass W unter $\mathbb{P}^*$ eine Brownsche Bewegung mit Drift r wird. Also ist $W_t^* = W_t - rt$ unter $\mathbb{P}^*$ eine standard Brownsche Bewegung.

Hilfssatz D.1. *Sei $X_t = \sigma W_t + \mu t$ eine Brownsche Bewegung mit Drift. Wir setzen $M_t = \sup_{s \le t} X_t$. Dann gilt für $a > \max\{b, 0\}$*

$$\mathbb{P}[M_t > a, X_t \le b] = \mathrm{e}^{2\mu a/\sigma^2}\Phi((b - 2a - \mu t)/\sqrt{\sigma^2 t}) ,$$

wobei $\Phi(y)$ die Verteilungsfunktion der standard Normalverteilung bezeichnet.

Beweis. Wir können $\sigma^2 = 1$ annehmen. Sei zuerst $\mu = 0$. Sei $T = \inf\{t > 0 : W_t > a\}$. Dann ist $W_{T+s} - W_T$ eine Brownsche Bewegung, und somit ist auf $\{T \le t\}$ $\mathbb{P}[W_t - W_T \le b - a \mid \mathcal{F}_T] = \mathbb{P}[W_t - W_T \ge a - b \mid \mathcal{F}_T]$. Also haben wir

$$\mathbb{P}[M_t > a, W_t \le b] = \mathbb{P}[M_t > a, W_t \ge 2a - b] = \mathbb{P}[W_t \ge 2a - b] = \Phi((b - 2a)/\sqrt{t}) .$$

Dies ist die Behauptung für $\mu = 0$.

Ist $\mu \neq 0$, so ändern wir das Mass mit dem Martingal

$$L_t = \exp\{-\mu W_t - \mu^2 t/2\} = \exp\{-\mu X_t + \mu^2 t/2\} .$$

Dann wird X eine Brownsche Bewegung unter $\mathbb{P}^*$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[M_t > a, X_t \le b] &= \mathbb{E}^*[\exp\{\mu X_t - \mu^2 t/2\}; M_t > a, X_t \le b] \\
&= \int_{-\infty}^b \mathrm{e}^{\mu y - \mu^2 t/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-(y-2a)^2/(2t)} \,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{2\mu a} \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-(y-2a-\mu t)^2/(2t)} \,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{2\mu a}\Phi((b - 2a - \mu t)/\sqrt{t}) .
\end{aligned}$$

Dies beweist die Formel. □

E. Trennung von konvexen Mengen

Hilfssatz E.1. *Seien U und V konvexe Mengen in $\mathbb{R}^n$, so dass $U \cap V = \emptyset$. Dann gibt es eine lineare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass $f(u) > f(v)$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.* □

F. Gronwalls Lemma

Hilfssatz F.1. *Sei $f(t)$ eine lokal beschränkte Funktion, so dass*

$$f(t) \le a + b \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

für Konstanten $a, b \ge 0$. Dann gilt für alle t,

$$f(t) \le a\mathrm{e}^{bt}\ .$$

Beweis. Wir können $|f(s)| \le 1$ annehmen. Wir zeigen nun, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f(t) \le a\Bigl(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(bt)^k\Bigr) + \frac{1}{(n+1)!}(bt)^{n+1}$$

gilt. Die Aussage ist für $n = 0$ trivial. Sei $n \ge 1$ und nehmen wir an, die Behauptung sei für $n-1$ bewiesen. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} f(t) &\le a + b \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \le a + b \int_0^t \Bigl[a\Bigl(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(bs)^k\Bigr) + \frac{1}{n!}(bs)^n\Bigr]\,\mathrm{d}s \\ &= a\Bigl(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}(bt)^{k+1}\Bigr) + \frac{1}{(n+1)!}(bt)^{n+1}\ . \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\frac{1}{(n+1)!}(bt)^{n+1}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Lassen wir nun $n \to \infty$, folgt die Behauptung. $\square$