

5. Finanzmathematik

5.1. Ein einführendes Beispiel

Betrachten wir eine ganz einfache Situation. Wir haben einen Markt, wo es nur erlaubt ist, heute und in einem Monat zu handeln. In diesem Markt gibt es eine Aktie, die heute für 100 Euro gehandelt wird. In einem Monat wird der Preis entweder auf 130 Euro steigen oder auf 70 Euro sinken. Der Markt (das heisst ein typischer Händler) glaubt, dass die Aktie mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ steigen wird, und mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ fallen wird. Der Einfachheit halber wird Bargeld nicht verzinst (oder der Optionspreis ist diskontiert, das heisst wir messen das Geld in der heutigen Kaufkraft).

Ein Händler braucht in einem Monat zehn Aktien. Er hat Angst, dass der Preis steigen könnte, und kauft sich daher eine Option auf zehn Aktien zum heutigen Preis. Eine Option das ist das Recht, aber nicht die Verpflichtung, die Aktien zu kaufen. Wenn der Preis steigt, dann wird der Händler die Option einlösen, und sich zehn Aktien zum Preis 100 kaufen. Falls der Preis sinkt, wird der Händler die Option verfallen lassen, und sich im Markt zehn Aktien zum Preis 70 kaufen.

Bis 1972 wurde der Preis wie folgt festgesetzt. Der Händler macht mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ (die Aktie steigt) einen Gewinn von 300 Euro, mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ macht er keinen Gewinn. Das heisst der Preis sollte daher

$$\frac{2}{3} \cdot 300 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 200$$

betragen.

Der Verkäufer der Option kauft sich schon fünf Aktien, so dass er sich, falls der Preis steigt, nur noch fünf Aktien dazukaufen muss. Das gibt die folgende Bilanz:

	Optionspreis	Optionsgewinn	Aktienkauf	Aktienverkauf	Gewinn
+	+200	-300	-500	+650	+50
-	+200	+0	-500	+350	+50

Der Verkäufer macht also einen sicheren Gewinn von 50 Euro. Da ein anderer Anbieter auch gerne einen sicheren Gewinn machen möchte, kann man erwarten, dass man die Option billiger erwerben könnte. Da ein funktionierender Markt einen sicheren Gewinn nicht erlauben würde, kann der Preis nicht mehr als 150 Euro betragen. Eine Möglichkeit, einen Gewinn zu erzielen, ohne ein Risiko einzugehen, heisst **Arbitrage**.

Sehen wir uns mögliche Strategien an. Nehmen wir an, der Verkäufer kauft θ Aktien. Falls θ negativ ist, bedeutet dies, dass der Verkäufer einen *Forward*-Vertrag abschliesst, das heisst, in einem Monat $-\theta$ Aktien ausliefert, die die Gegenpartei heute schon bezahlt. Falls die Aktie steigt, ist der Gewinn dieses Spiels (ohne den Optionspreis)

$$-300 - 100\theta + 130\theta = 30\theta - 300 .$$

Falls der Preis sinkt, ist der Gewinn

$$0 - 100\theta + 70\theta = -30\theta .$$

Der minimale Gewinn ist daher

$$\min\{30\theta - 300, -30\theta\} .$$

Dieser minimale Gewinn ist maximal für $\theta = 5$, das heisst -150 . Somit kann der Optionspreis nicht höher als 150 liegen.

Der Käufer der Option kann auch in die Aktie investieren. Ohne Optionspreis wird der Gewinn

$$300 - 100\theta + 130\theta = 300 + 30\theta$$

falls der Preis steigt, und

$$0 - 100\theta + 70\theta = -30\theta$$

falls der Preis sinkt. Der minimale Verlust wird maximal, falls $\theta = -5$, das heisst, der Gewinn ist 150. Daher kann die Option nicht billiger als zum Preis 150 gehandelt werden. Wir haben dadurch den Preis der Option bestimmt. Bemerken Sie bitte, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Preis steigt, keine Rolle spielt.

Wir haben auf diese Weise nicht nur den Preis der Option bestimmt, sondern gleich auch eine Handelsstrategie gefunden, die den Wert der Option erzeugt. So eine Handelsstrategie nennen wir *Hedging Strategie*.

Nehmen wir nun an, die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie steigt, sei p . Nach der alten Methode müsste der Preis der Option dann $300p$ betragen. Dies stimmt mit unserem Preis überein, falls $p = \frac{1}{2}$. In diesem Fall ist der erwartete Kurs der Aktie in einem Monat

$$\frac{1}{2}130 + \frac{1}{2}70 = 100 .$$

Im Falle $p = \frac{1}{2}$ würde die Aktie im Mittel den heutigen Wert haben, das heisst der Aktienpreis ist ein *fares Spiel*. Die Mathematiker nennen so ein faires Spiel ein *Martingale*.

Ändern wir nun den Aktienpreis so ab, dass neben 130 und 70 auch der Wert 100 in einem Monat möglich wird. Versuchen wir wieder eine Hedging Strategie zu finden. Der Gewinn (für den Verkäufer) in den drei möglichen Fällen wird

$$30\theta - 300, \quad 0, \quad -30\theta.$$

Das Minimum wird maximal falls $\theta = 5$, das heisst, der Wert der Option darf nicht höher liegen als 150. Der Preis darf auch nicht 150 betragen, da sonst, im Falle dass der Preis gleichbleibt, der Verkäufer einen Gewinn von 150 macht, in den anderen Fällen aber nichts verliert.

Der Gewinn für den Käufer wird

$$30\theta + 300, \quad 0, \quad -30\theta.$$

Dieser Preis wird minimal falls $\theta \in [-10, 0]$. Das bedeutet, dass der Preis mindestens 0 betragen sollte. Der Preis kann aber natürlich nicht 0 betragen, da sonst der Halter der Option einen sicheren Gewinn macht, falls der Preis sich nicht ändert, aber keinen Verlust macht, falls der Preis gleichbleibt. Unser Argument liefert uns somit keinen eindeutigen Preis mehr. Falls der Preis nicht 150 beträgt, gibt es auch keine Hedging Strategie für den Verkäufer mehr. Falls der Preis höher als Null liegt, gibt es keine Hedging Strategie mehr für den Halter der Option.

Wir hatten im Fall von zwei möglichen Preisen bemerkt, dass im Falle, dass der Aktienpreis ein faires Spiel ist, der Preis mit der ‘alten’ Methode berechnet werden kann. Nehmen wir an, der Aktienpreis steigt mit Wahrscheinlichkeit p , sinkt mit Wahrscheinlichkeit q und bleibt mit Wahrscheinlichkeit $1 - p - q$ gleich. Dann ist der Preis in einem Monat im Mittel

$$130p + 100(1 - p - q) + 70q = 100 + 30p - 30q.$$

Dies ist im Mittel der heutige Preis, falls $p = q$. Damit alle drei Preise möglich sind, müssen wir $p \in (0, \frac{1}{2})$ wählen. Die ‘alte’ Methode gibt dann den Optionspreis

$$300p + 0(1 - p) = 300p.$$

Somit erhalten wir das Intervall $(0, 150)$ als mögliche Preise. Dies ist das gleiche Intervall, das wir auch mit dem “keine Arbitrage”-Argument erhalten haben.

5.2. Einperioden-Modelle

Nehmen wir an, wir haben n Aktiven, die zur Zeit 0 die Preise $q_1, q_2, \dots, q_n$ haben. Wir fassen die Preise im Vektor $\mathbf{q} = (q_i)$ zusammen. Wir nehmen an, zur Zeit 1

gibt es s Szenarien. Die Werte der Aktiven fassen wir in der Matrix $\mathbf{D} = (D_{ij})$ zusammen. D_{ij} ist der Preis des i -ten Aktiv im j -ten Szenario. Ein Agent kann sich nun ein Portfolio zusammenstellen. Er wählt θ_i Einheiten des i -ten Aktivs. Wir fassen das Portfolio im Zeilen-Vektor $\boldsymbol{\theta} = (\theta_i)$ zusammen. Der Preis des Portfolios wird dann

$$\sum_{i=1}^n \theta_i q_i = \boldsymbol{\theta} \mathbf{q} .$$

Der Wert des Portfolios im Szenario j wird dann

$$\sum_{i=1}^n \theta_i D_{ij} = (\boldsymbol{\theta} \mathbf{D})_j .$$

Wir können alle Werte der Szenarien zusammenfassen im Vektor $\boldsymbol{\theta} \mathbf{D}$.

In einem sinnvollen Markt gilt “Kein Gewinn ohne Risiko”. Wir geben eine mathematische Charakterisierung in der folgenden Definition.

Definition 5.1. Eine Handelsstrategie $\boldsymbol{\theta}$ heisst **Arbitrage**, falls $\boldsymbol{\theta} \mathbf{q} < 0$ und $\boldsymbol{\theta} \mathbf{D} \geq 0$ (alle Koordinaten positiv); oder falls $\boldsymbol{\theta} \mathbf{q} = 0$ und $\boldsymbol{\theta} \mathbf{D} > 0$ (alle Koordinaten positiv, und mindestens eine echt positiv).

Eine Arbitrage sollte in einem Markt nicht existieren.

Wenn man alle möglichen $\boldsymbol{\theta}$ durchprobieren muss, wird dies sehr aufwendig. Folgendes Resultat gibt ein einfaches Kriterium für die (nicht-) Existenz einer Arbitrage.

Satz 5.2. Es gibt genau dann keine Arbitrage, wenn ein Vektor $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_s)^\top$ mit streng positiven Koordinaten existiert, so dass $\mathbf{q} = \mathbf{D} \boldsymbol{\psi}$.

Beweis. Nehen wir an, dass $\boldsymbol{\psi}$ existiert. Sei $\boldsymbol{\theta}$ ein Portfolio mit $\boldsymbol{\theta} \mathbf{q} \leq 0$ und $\boldsymbol{\theta} \mathbf{D} \geq 0$ an. Dann ist

$$0 \geq \boldsymbol{\theta} \mathbf{q} = \boldsymbol{\theta} \mathbf{D} \boldsymbol{\psi} = \sum_{j=1}^s (\boldsymbol{\theta} \mathbf{D})_j \psi_j \geq 0 .$$

Also muss $\sum_{j=1}^s (\boldsymbol{\theta} \mathbf{D})_j \psi_j = 0$ gelten. Da $(\boldsymbol{\theta} \mathbf{D})_j \geq 0$ und $\psi_j > 0$, muss $(\boldsymbol{\theta} \mathbf{D})_j = 0$ gelten. Somit kann keine Arbitrage existieren.

Die Umkehrung ist schwieriger. Wir bilden die Menge M der Vektoren $(-\boldsymbol{\theta} \mathbf{q}, \boldsymbol{\theta} \mathbf{D})$ für alle Vektoren $\boldsymbol{\theta}$. Wenn keine Arbitrage existiert, dann ist der Null-Vektor der einzige Vektor mit positiven Koordinaten. Sei $L \subset \mathbb{R}^{s+1}$ die Menge der Vektoren mit positiven Koordinaten, ohne den Nullvektor. Dann ist $L \cap M = \emptyset$.

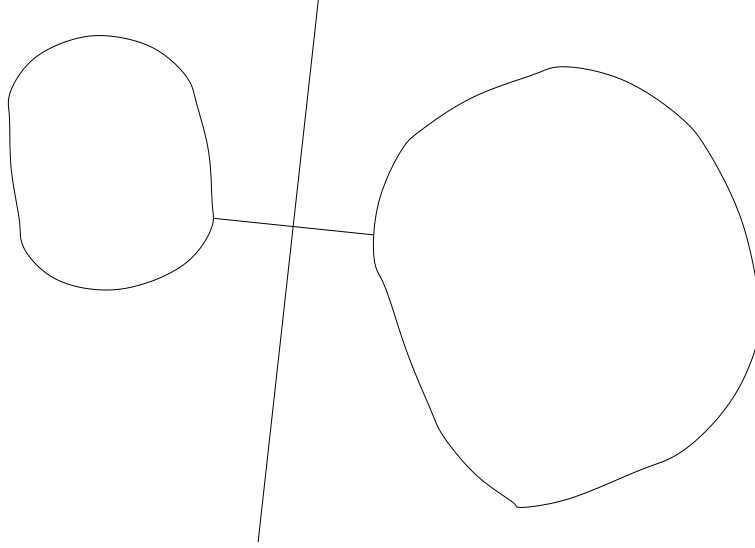


Abbildung 5.1: Trennung von konvexen Mengen

Definition 5.3. Eine Menge A heisst konvex, falls für alle $p, q \in A$ auch die Verbindungsgerade $(1-t)p + tq$, $t \in]0, 1[$ in A ist.

Die Mengen L und M sind konvex. Für L ist dies klar, für M haben wir

$$(1-t)(-\theta_1 \mathbf{q}, \theta_1 \mathbf{D}) + t(-\theta_2 \mathbf{q}, \theta_2 \mathbf{D}) = (-(1-t)\theta_1 + t\theta_2) \mathbf{q}, [(1-t)\theta_1 + t\theta_2] \mathbf{D} \in M .$$

Konvexe Mengen haben die Eigenschaft, dass eine (Hyper-)Ebene tangential durch einen Randpunkt den Raum so teilt, dass die Menge ganz auf der einen Seite liegt. Wenn die beiden Mengen disjunkt sind, suchen wir die Punkte, wo der Abstand minimal wird. Legen wir nun eine Ebene tangential, so befinden sich die beiden Mengen auf verschiedenen Seiten der Ebene, siehe Abbildung 5.1. Da der Nullpunkt ein Randpunkt beider Mengen ist, muss die Ebene durch den Nullpunkt gehen.

Sei $(\alpha, \boldsymbol{\psi})$ ein Normalenvektor auf die trennende Ebene. Wir können annehmen, dass das Skalarprodukt $x^\top(\alpha, \boldsymbol{\psi}) \geq 0$ für $x \in L$ erfüllt. Dann muss $x^\top(\alpha, \boldsymbol{\psi}) \leq 0$ für $x \in M$ gelten. Wir haben für ein Portfolio $\boldsymbol{\theta}$

$$0 \geq -\alpha \boldsymbol{\theta} \mathbf{q} + \boldsymbol{\theta} \mathbf{D} \boldsymbol{\psi} = -[-\alpha(-\boldsymbol{\theta}) \mathbf{q} + (-\boldsymbol{\theta}) \mathbf{D} \boldsymbol{\psi}] \geq 0 .$$

Somit muss $x^\top(\alpha, \boldsymbol{\psi}) = 0$ für $x \in M$ gelten. Das bedeutet

$$\alpha \boldsymbol{\theta} \mathbf{q} = \boldsymbol{\theta} \mathbf{D} \boldsymbol{\psi} .$$

Der Vektor $(\alpha, \boldsymbol{\psi})$ steht somit senkrecht auf M , das heisst, M liegt in der trennenden Ebene. Da für $x \in L$ auch $tx \in L$ für alle $t > 0$ gilt, kann L keine Punkte auf der

trennenden Ebene haben. Das bedeutet, dass $x^\top(\alpha, \boldsymbol{\psi}) > 0$ für $x \in L$ gilt. Da die Basisvektoren in L sind, muss $\alpha > 0$ und $\psi_j > 0$ gelten. Teilen wir $\boldsymbol{\psi}$ durch α , können wir $\alpha = 1$ annehmen. Da dann $\boldsymbol{\theta} \mathbf{q} = \boldsymbol{\theta} \mathbf{D} \boldsymbol{\psi}$ für alle $\boldsymbol{\theta}$ gilt, haben wir $\mathbf{q} = \mathbf{D} \boldsymbol{\psi}$. $\square$

5.3. Binomialmodelle

In einem Markt gibt es zwei Aktive. Ein risikoloser Aktiv mit Wert $B_t = r^t$ mit $1 \leq r < \infty$ und ein riskanter Aktiv S_t . Der Startwert S_0 ist fest, und wir können den Wert 1 setzen. Ist S_t bekannt, so kann S_{t+1} die beiden Werte uS_t und dS_t annehmen, wobei $u > d > 0$. Die Zeit ist aus der Menge $\{0, 1, \dots, N\}$. Wir wollen zeigen, dass $u > r > d$ gelten muss, damit keine Arbitrage existiert. In der Tat, ist $d \geq r$, so kaufen wir eine Einheit des Aktiv S , und leihen das Geld S_t aus dem Aktiv B , das heisst, $\boldsymbol{\theta} = (-S_t/B_t, 1)$. Zur Zeit $t+1$ ist der Wert entweder $uS_t - rS_t > dS_t - rS_t \geq 0$ oder $dS_t - rS_t \geq 0$. Dies ist eine Arbitrage. Ist $u \leq r$, so verkaufen wir in einem Termingeschäft eine Aktie und investieren den Erlös in B . Dann ist der Wert zur Zeit $t+1$ entweder $rS_t - dS_t > rS_t - uS_t \geq 0$ oder $rS_t - uS_t \geq 0$. Da wir keine Arbitrage annehmen, nehmen wir $u > r > d$ an.

Betrachten wir eine Periode. Dann ist

$$\mathbf{q} = (B_t, S_t)^\top \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} rB_t & rB_t \\ uS_t & dS_t \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung $\mathbf{q} = \mathbf{D} \boldsymbol{\psi}$ finden wir den Vektor $\boldsymbol{\psi} = (\frac{r-d}{r(u-d)}, \frac{u-r}{r(u-d)})^\top$. Somit gibt es im Modell keine Arbitrage.

Messen wir nun Werte, indem wir den Betrag angeben, den wir in 0 in B investieren müssten, um den selben Betrag zur Zeit t zu erhalten. Wir haben dann $\tilde{B}_t = B_t/B_t = 1$ und $\tilde{S}_t = S_t/B_t$. Betrachten wir die Veränderung von $\tilde{B}_t$, so haben wir entweder

$$\tilde{S}_{t+1} = \frac{uS_t}{r^{t+1}} = \frac{u}{r} \frac{S_t}{r^t} = \frac{u}{r} \tilde{S}_t,$$

oder $\tilde{S}_{t+1} = \frac{d}{r} \tilde{S}_t$. Das ist also das Modell mit $\tilde{u} = u/r > 1 = \tilde{r} > d/r = \tilde{d}$. Wir rechnen im folgenden mit $r = 1$.

Im Markt wird nun ein weiteres Produkt eingeführt. Sei f eine Funktion. Nehmen wir an, dass wir einen Vertrag haben, wo der Halter den Betrag $f(S_N)$ zum Zeitpunkt

N erhält. Ist $f(S_N)$ negativ, so muss der Halter den Betrag $-f(S_N)$ bezahlen. Wählt man

$$f(x) = \begin{cases} x - K & \text{falls } x > K \\ 0 & \text{falls } x \leq K \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} K - x & \text{falls } x < K \\ 0 & \text{falls } x \geq K \end{cases},$$

so ist dies eine Call-Option, bzw. Put-Option. Da das Produkt aus den bekannten Aktiven abgeleitet wird, nennt man so ein Produkt **Derivativ**.

Wenn keine Arbitrage existieren soll, so muss der Preis zur Zeit $N - 1$

$$f_{N-1}(S_{N-1}) = \frac{1-d}{u-d}f(uS_{N-1}) + \frac{u-1}{u-d}f(dS_{N-1})$$

betragen, da die Formel $\mathbf{q} = \mathbf{D}\boldsymbol{\psi}$ auch für den Fall mit drei Aktiven gelten muss. $\boldsymbol{\psi}$ ist ja durch die ersten beiden Aktiven eindeutig bestimmt. Zur Zeit $N - 1$ ist der Wert des Derivativs eindeutig durch die Funktion $f_{N-1}(S_{N-1})$ bestimmt. Der Wert des neuen Derivativs muss zum Zeitpunkt N_2 gleich dem Wert der Zahlung $f_{N-1}(S_{N-1})$ im Zeitpunkt $N - 1$ sein. Wäre dies nicht so, könnte man im Falle, wo der Wert der Zahlung $f(S_N)$ zur Zeit N grösser als der Wert Zahlung $f_{N-1}(S_{N-1})$ zur Zeit $N - 1$ wäre, die Zahlung f_{N-1} kaufen und die Zahlung f_N verkaufen und die Differenz in B investieren. Zur Zeit $N - 1$ erhält man $f_{N-1}(S_{N-1})$. Damit kann man die Zahlung f_N zurückkaufen, und hat nur noch den Betrag, den man in B investiert hat. Dies wäre eine Arbitrage. Wir erhalten so rekursiv den Wert des Derivativs zur Zeit t

$$f_t(S_t) = \frac{1-d}{u-d}f_{t+1}(uS_t) + \frac{u-1}{u-d}f_{t+1}(dS_t).$$

Wir erhalten den eindeutigen Preis des Derivativs zu jedem Zeitpunkt, insbesondere den Preis in 0, $f_0(S_0)$.

Wenn wir nun den Derivativ f verkaufen, erhalten wir den Betrag $f_0(S_0)$. Diesen Betrag können wir investieren. Nehmen wir an, wir haben im Zeitpunkt t den Betrag V_t zur Verfügung. Wir investieren θ_t Einheiten in den Aktiv S , und $V_t - \theta_t S_t$ in den Aktiv B . Weiter haben wir den Vertrag f , das heisst eine Verpflichtung $-f_t(S_t)$. Zur Zeit $t + 1$ haben wir ein Portfolio mit Wert

$$\theta_t S_{t+1} + V_t - \theta_t S_t - f_{t+1}(S_{t+1}).$$

Nehmen wir die Differenz zum Wert des Portfolios zur Zeit t , erhalten wir

$$\begin{aligned} & \theta_t(S_{t+1} - S_t) - f_{t+1}(S_{t+1}) + f_t(S_t) \\ &= \theta_t(S_{t+1} - S_t) - f_{t+1}(S_{t+1}) + \frac{1-d}{u-d}f_{t+1}(uS_t) + \frac{u-1}{u-d}f_{t+1}(dS_t). \end{aligned}$$

Steigt der Preis des Aktivs, bzw. sinkt er, erhält man

$$\begin{aligned}
 & \theta_t S_t(u-1) - f_{t+1}(uS_t) + \frac{1-d}{u-d} f_{t+1}(uS_t) + \frac{u-1}{u-d} f_{t+1}(dS_t) \\
 &= \theta_t S_t(u-1) + \frac{1-u}{u-d} f_{t+1}(uS_t) + \frac{u-1}{u-d} f_{t+1}(dS_t) \\
 & \theta_t S_t(d-1) - f_{t+1}(dS_t) + \frac{1-d}{u-d} f_{t+1}(uS_t) + \frac{u-d}{u-d} f_{t+1}(dS_t) \\
 &= \theta_t S_t(d-1) + \frac{1-d}{u-d} f_{t+1}(uS_t) + \frac{d-1}{u-d} f_{t+1}(dS_t)
 \end{aligned}$$

Wählen wir nun also

$$\theta_t = \frac{f_{t+1}(uS_t) - f_{t+1}(dS_t)}{(u-d)S_t},$$

so wird die Änderung des Wertes in beiden Fällen 0. Das heisst, wenn wir die Strategie $\{\theta_t\}$ anwenden, haben wir zu jedem Zeitpunkt genau den Wert des Derivativs f . In unserem Modell, können wir das Risiko somit vollständig eliminieren, indem wir die Investitionsstrategie $\{\theta_t\}$ anwenden.

Verwenden wir nun Wahrscheinlichkeiten. Sei p_t die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen t und $t+1$ der riskante Aktiv steigt, und $1-p_t$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Aktiv sinkt. Um ein faires Spiel zu erhalten, wählen wir die Wahrscheinlichkeit eines Anstiegs p^* . Dann muss $S_t = p^*uS_t + (1-p^*)dS_t$ gelten. Daraus berechnen wir $p^* = \frac{1-d}{u-d}$, und damit $1-p^* = \frac{u-1}{u-d}$. Somit gilt $f_t(S_t) = p^*f_{t+1}(uS_t) + (1-p^*)f_{t+1}(dS_t)$. Das heisst, der Wert zur Zeit t ist der erwartete Wert zur Zeit $t+1$, und damit der erwartete Wert zur Zeit N . Es wird aber nicht die wirkliche Wahrscheinlichkeit benutzt, sondern die Wahrscheinlichkeit des fairen Spiels mit Wahrscheinlichkeit p^* . Der Wert eines Derivativs kann so über einen Baum ermittelt werden. Es folgt weiter, dass für die Preisbestimmung die reellen Wahrscheinlichkeiten p_t keine Rolle spielen. Insbesondere ist der Preis von der Überzeugung eines Agenten unabhängig.

Betrachten wir einen festen Zeitraum $[0, T]$. Unterteilen wir das Intervall in 2^n Schritte. In diesem diskreten Modell benutzen wir das oben beschriebene Binomialmodell mit den speziell gewählten Parametern, dann konvergiert das Modell zum sogenannten **Black-Scholes-Modell**. Als Grenzwert erhält man dann die Optionspreise im Black-Scholes-Modell. Im Falle einer Call- oder Putoption führt dies zur Black-Scholes-Formel, für die im Jahre 1997 der Nobelpreis vergeben wurde. In der modernen Stochastik kann man diese Formel einfacher herleiten, wobei man den oben beschriebenen Ideen folgt.