

	kl. Sekund	Sekund	kl. Terz	Terz	Quart	Tritonus
Verhältnis	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{32}$
Dominante	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{48}{45}$
Subdominante	$\frac{135}{128}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{20}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{32}$
	Quint	kl. Sext	Sext	kl. Septim	Septim	Oktav
Verhältnis	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{15}{8}$	2
Dominante	$\frac{3}{2}$	$\frac{24}{15}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{15}{8}$	2
Subdominante	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	2

Tabelle 3.1: Frequenzverhältnisse der Akkorde

3. Mathematik und Musik

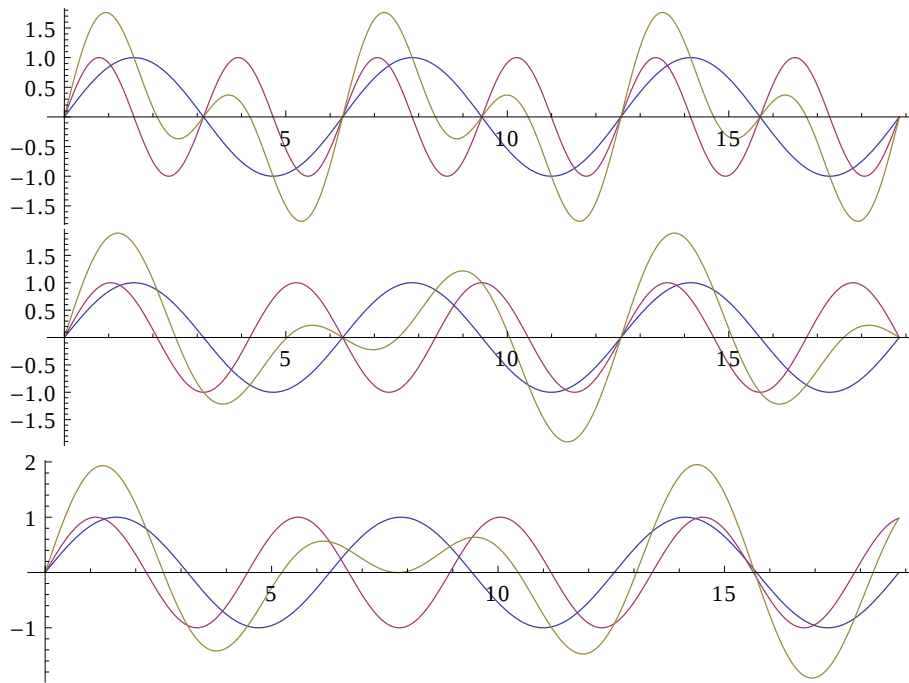
3.1. Die Akkorde

Verschiedene Musikinstrumente haben verschiedene Klänge. Sogar auf der gleichen Art von Instrumenten gibt es verschiedene Klangfarben. So tönt der gleiche Ton auf einer Geige anders als auf einer Bratsche. Dies liegt an den Ober- und Untertönen. Ein Ton ist nämlich nie rein, ausser er ist elektronisch erzeugt. Zum eigentlichen Ton kommen noch Töne, deren Frequenzen ein Vielfaches der Frequenz des Grundtons sind.

Bilden wir Akkorde, so gibt es Töne, die zusammenpassen, und solche, die zusammen schrecklich tönen. Oktaven sind Töne, die sehr gut zusammenpassen. Die Griechen haben dieses Phänomen schon in der Antike untersucht. Da sie keine Frequenzen messen konnten, haben sie untersucht, wie die Tonhöhe und die Länge von Saiten zusammenhängen. So erhöht sich ein Ton um eine Oktave, wenn man die Länge der Saite halbiert. Heute kennen wir die Physik, die dahinter steckt, und wissen, dass eine Saite eine Schwingung erzeugt, und dass die Frequenz der Schwingung von der Länge der Saite abhängig ist. Die Frequenz verdoppelt sich, wenn man die Saite halbiert.

Die Griechen haben auch festgestellt, dass Längenverhältnisse mit kleinem Nenner (wie z.B. $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$) schöner tönen, also solche mit hohem Nenner (z.B. $\frac{32}{45}$). Daraus haben sie ihre Harmonielehre begründet. Die Frequenzverhältnisse in den Akkorden sind in Tabelle 3.1 gegeben.

Betrachten wir eine Sinuskurve $\sin \omega x$, wobei ω die Frequenz ist. Eine Oktave höher, $\sin 2\omega x$, passt zweimal in ein Basissignal. Addieren wir die Töne, erhalten

Abbildung 3.1: *Oktav, Quint und Tritonus*

wir ein relativ einfaches Signal. Daher tönt der Akkord schön. Bei einer Quint passt der zweite Ton dreimal in zwei Wellenlängen. Somit wiederholt sich das zusammengesetzte Signal nach jeweils zwei Wellenlängen des Basistons. Beim Tritonus, auch Teufelston genannt, brauchen wir 32 Wellenlängen des Basistons, um 45 Wellenlängen des zweiten Tons unterzubringen. Dieser Ton wird ziemlich unregelmässig. Daher wird der Akkord auch als hässlich empfunden.

3.2. Das pythagoräische System

In Griechenland hat man in der Antike versucht, ein “göttliches” Tonsystem zu entwickeln. Die Zahl $3/2$ (also die Quint) galt als besonders schön. Daher wollte man nur Frequenzverhältnisse akzeptieren, so dass die Töne immer das Verhältnis $3/2$ bilden. Nach der Quint kommt dann also das Verhältnis $9/4$. Dies liegt über einer Oktave, und ist somit die Sekund $9/8$. Die Sext wird dann $27/16$. Analog erhält man für die Terz dann $\frac{1}{2}(81/32) = 81/64$. Auf diese Weise erhält man also sehr schnell grosse Nenner, was dann nicht mehr besonders schön tönt.

Die Schule des Pythagoras entdeckte das folgende: Wir haben

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{531441}{4096} \approx 2^7 \cdot 1.01364 .$$

	kl. Sekund	Sekund	kl. Terz	Terz	Quart	Tritonus
Verhältnis	1.06667	1.125	1.2	1.25	1.33333	1.40625
Pythagoräisch	1.05350	1.125	1.18519	1.26563	1.33333	1.42383
Temperiert	1.05946	1.12246	1.18921	1.25992	1.33484	1.41421
	Quint	kl. Sext	Sext	kl. Septim	Septim	Oktav
Verhältnis	1.5	1.6	1.66667	1.77778	1.875	2
Pythagoräisch	1.5	1.58025	1.6875	1.77778	1.89844	2
Temperiert	1.49831	1.58740	1.68179	1.78180	1.88775	2

Tabelle 3.2: *Temperierte Frequenzverhältnisse der Akkorde*

Nach zwölf Tönen hat man also ungefähr 7 Oktaven. Die Differenz nennt man das pythagoräische Komma. Der Trick ist nun, dass man irgendwo ein kleineres Intervall einfügt, also zum Beispiel nach dem Tritonus. Tabelle 3.2 gibt die Frequenzverhältnisse an, die man so erhält.

Man könnte sich nun fragen, ob es nicht möglich wäre, dass irgendwann die Oktave genau getroffen wird. Das heisst, es gibt Zahlen n und m , so dass $(\frac{3}{2})^n = 2^m$. Dann müsste aber $3^n = 2^n 2^m = 2^{n+m}$ sein. Da aber für $n \neq 0$ die Zahl 3^n ungerade und die Zahl 2^{n+m} gerade ist, kann nur $n = 0$ gelten. Dann ist auch $m = 0$, und wir sehen, dass es unmöglich ist, mit dem Verhältnis $3/2$ eine ganze Oktave zu erhalten.

3.3. Das temperierte System

Komponiert man eine Melodie, so verwendet man nicht nur die Basisstufe, sondern wechselt zur 5. (Dominante) und 4. Stufe (Subdominante). Zum Beispiel, beim Blues ist die Reihenfolge 1-5-4-1. 5. Dominante bedeutet, dass die Quint der Basis ist, und die Akkorde dann darauf aufbaut. Die Quart wird dann mit Oktav und Quint gebildet, die Quint mit der Sekund über der Oktav ($\frac{9}{4}$) und der Quint. Die Frequenzverhältnisse die daraus resultieren, sind in Tabelle 3.1 gegeben. Die Verhältnisse sind nun zum Teil verschieden von der Grundstufe. Wir sehen, dass einige der Verhältnisse (wie die kleine Terz) keine schönen Harmonien mehr ergeben. Das gleiche Problem taucht im pythagoräischen System auf, wo schon die Terz kein Wohlklang mehr ist.

Wollen wir also schöne Musik machen, brauchen wir drei Instrumente, die wir verschieden gestimmt haben. Auch für jede Tonart muss man dann ein eigenes Instrument haben. Bei Blasinstrumenten bedeutet dies, dass man 11 verschiedene Instrumente benötigt, um alle Tonarten spielen zu können. Beim Klavier brauchte

man jede Taste 11 Mal, um jede Tonart spielen zu können, bei der Orgel jede Pfeife 11 Mal. Dies ist eine grosse Einschränkung.

Die Idee ist nun, die Töne gleich zu verteilen. Das heisst, das Verhältnis von Sekund zu kleiner Sekund ist eine kleine Sekund, das Verhältnis von kleiner Terz zu Sekund ist eine kleine Sekund, etc. Dass dies funktioniert liegt daran, dass es für das menschliche Ohr schwierig ist, Frequenzverhältnisse zu unterscheiden, die sehr nah beieinanderliegen. In einer Oktave liegen 12 Halbtöne. Ist x das Frequenzverhältnis einer kleinen Sekunde, so ist das Verhältnis in einer grossen Sekunde $xx = x^2$, in einer kleinen Terz $xx^2 = x^3$, in einer grossen Terz $xx^3 = x^4$, etc. Eine Terz entspricht 2 Sekunden, also dem Verhältnis $x^2x^2 = x^4$, was zur Definition mit Halbtönen entspricht. In der Oktave haben wir 12 Halbtöne, also müssen wir $x^{12} = 2$ haben. Damit können wir $x = \sqrt[12]{2} \approx 1.059463094$. Benützen wir die gleichmässigen Frequenzverhältnisse, so nennen wir die Verhältnisse **temperiert**. In Tabelle 3.2 sind die Frequenzverhältnisse und die temperierten Verhältnisse gegeben. So ist das Verhältnis der Frequenzen bei der Quint 1.00113. Wir brauchen also fast Tausend Wellenlängen, um eine Abweichung von einer Wellenlänge zu erhalten. Da das menschliche Ohr maximal eine Abweichung von einem Tausenstel hören kann, ist der Unterschied für das Ohr fast nicht zu hören; also zumindest schwierig, wenn man nicht direkt vergleichen kann.

Die Frequenzen verhalten sich proportional. Wir sind uns aber gewohnt, in Halbtönen zu denken. Wenn wir das Frequenzverhältnis kennen, wie können wir dann dies in Halbtöne umwandeln? Sei $b > 1$. Betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto b^x$. Die Funktion ist echt wachsend, da für $x > y$, $b^x = b^y b^{x-y}$ und $b^{x-y} > 1$. Somit existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_b(x)$. Die Funktion heisst **Logarithmus zur Basis b** . Es gilt dann $b^{\log_b(x)} = x = \log_b b^x$. Aus

$$b^{\log_b(x) + \log_b(y)} = b^{\log_b(x)} b^{\log_b(y)} = xy = b^{\log_b(xy)}$$

folgern wir, dass $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$. Aus

$$b^{y \log_b(x)} = (b^{\log_b(x)})^y = x^y = b^{\log_b(x^y)}$$

folgern wir, dass $\log_b(x^y) = y \log_b(x)$. Insbesondere ist $\log_b(x^{-1}) = -\log_b(x)$ und $\log_b(x/y) = \log_b(xy^{-1}) = \log_b(x) - \log_b(y)$.

Betrachten wir nun eine andere Basis $a > 1$. Bilden wir

$$a^{\log_b(x)/\log_b(a)} = (b^{\log_b(a)})^{\log_b(x)/\log_b(a)} = b^{\log_b(a) \log_b(x)/\log_b(a)} = b^{\log_b(x)} = x.$$

Daher schliessen wir, dass $\log_a(x) = \log_b(x)/\log_b(a)$. Besonders wichtig in der Mathematik ist die Basis $e = 2.718281828$. Dieser Logarithmus wird mit $\ln x = \ln_e(x)$ bezeichnet und heisst **natürlicher Logarithmus**. Wir finden diesen Logarithmus auf fast allen Taschenrechnern. Der natürliche Logarithmus lässt sich durch die Reihendarstellung

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+1}}{2k+1}$$

mit $|x| < 1$ berechnen.

Haben wir nun k Halbtöne, so ist das Frequenzverhältnis $r = 2^{k/12}$. Wir können nun k durch $k = 12 \log_2(r)$ bestimmen. Vergleichen wir also den Kammerton A (440 Hz) mit den Ton C (524 Hz), so erhalten wir das Verhältnis $r = \frac{524}{440} = 1.19091$. Dann ist

$$\log_2(1.19091) = \frac{\ln(1.19091)}{\ln 2} = 0.252063 = \frac{3.02476}{12}.$$

Somit sind dies 3 Halbtöne, oder eine kleine Terz.

3.4. Zwölftonmusik

Bei der Zwölftonmusik (Arnold Schönberg, Anton Webern, Alban Berg, Milton Babbitt) benötigt man modulare Arithmetik. Wir zählen die Halbtöne, und haben so die Töne $[0], [1], [2], \dots, [11]$. Dabei bedeutet $[k]$, dass man den k -ten Halbton modula Oktaven verwendet. Man schreibt eine erste Reihe mit 12 Tönen auf, die mit $[0]$ beginnt, und alle Halbtöne genau einmal enthält. Wir haben dazu

$$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 11! = 39916800$$

Möglichkeiten. Nennen wir diese Folge $a_{11}, a_{12}, a_{13} \dots$. Wir definieren nun $a_{ij} = a_{1j} - a_{1i} \bmod 12$, wobei $i \geq 2$. Dann erhalten wir eine Matrix, wo jedes der 12 Elemente genau einmal in jeder Zeile und in jeder Kolonne vorkommt. Eine Beispiel ist in Tabelle 3.3 gegeben.

In der Tat, halten wir i fest, so ist $a_{1j} - a_{1i}$ für jedes j verschieden, da die Gleichung $a_{ij} + x = -a_{1i} = 12 - a_{1i}$ eine eindeutige Lösung hat. Somit muss $x = -a_{1j} = 12 - a_{1j}$ gelten. Da die a_{1j} verschieden sind, müssen auch die a_{ij} verschieden sein. Halten wir j fest, so gilt analog, dass $a_{1j} + x = a_{ij}$ eine eindeutige Lösung hat, und somit müssen die a_{ij} verschieden sein, da die $12 - a_{1i}$ verschieden sind.

Es gibt verschieden Varianten die Tabelle zu verwenden. Man schreibt z.B. eine Melodie, wo im ersten Takt die erste Zeile (als Akkorde) in der Reihenfolge vorkommen. Also Akkord gebildet aus $[a_1], [a_2], [a_3]$, dann ein Akkord $[a_4], [a_5], [a_6]$, ein

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	5	10	4	9	3	6	11	2	8	1	7
2	7	0	5	11	4	10	1	6	9	3	8	2
3	2	7	0	6	11	5	8	1	4	10	3	9
4	8	1	6	0	5	11	2	7	10	4	9	3
5	3	8	1	7	0	6	9	2	5	11	4	10
6	9	2	7	1	6	0	3	8	11	5	10	4
7	6	11	4	10	3	9	0	5	8	2	7	1
8	1	6	11	5	10	4	7	0	3	9	2	8
9	10	3	8	2	7	1	4	9	0	6	11	5
10	4	9	2	8	1	7	10	3	6	0	5	11
11	11	4	9	3	8	2	5	10	1	7	0	6
12	5	10	3	9	2	8	11	4	7	1	6	0

Tabelle 3.3: Mögliche Karte der Zwölftonmusik

Akkord $[a7]$, $[a8]$, $[a9]$ und ein Akkord $[a10]$, $[a11]$, $[a12]$. Im nächsten Takt nimmt man die Akkorde aus der zweiten Zeile, etc. Oder, man bildet eine Melodie aus der ersten Zeile (in der richtigen Reihenfolge), die zweite Stimme wird aus der ersten Zeile rückwärts gebildet, die dritte Stimme aus der ersten Kolonne.

3.5. Obertöne

Verschiedene Instrumente tönen verschieden. So kann man leicht eine Geige von einer Querflöte oder von einer Oboe unterscheiden. Sogar eine Geige und eine Bratsche haben einen verschiedenen Klang.

Ein Geräusch wird durch Kompression und Dekompression von Luft erzeugt. Ist an einer Stelle ein Überdruck, so pflanzt verlässt Luft diese Stelle und erzeugt daneben einen Überdruck. So pflanzt sich dieser Überdruck aus. Herrscht an einer Stelle eine Unterdruck, so wird Luft aus der Umgebung angesogen, so dass in der Umgebung ein Unterdruck entsteht. Ein Ton ist nun ein periodisches Abwechseln von Unter- und Überdruck. Im Ohr wird dieser Wechsel in Nervenimpulse umgewandelt, und so als Ton hörbar.

Misst man einen Ton eines Instrumentes, so erkennt man, dass der Ton keine Sinuskurve erzeugt. Das Muster wiederholt sich periodisch, und erzeugt so die Tonhöhe. Die Frequenz ist dann die Anzahl Wiederholungen pro Sekunde.

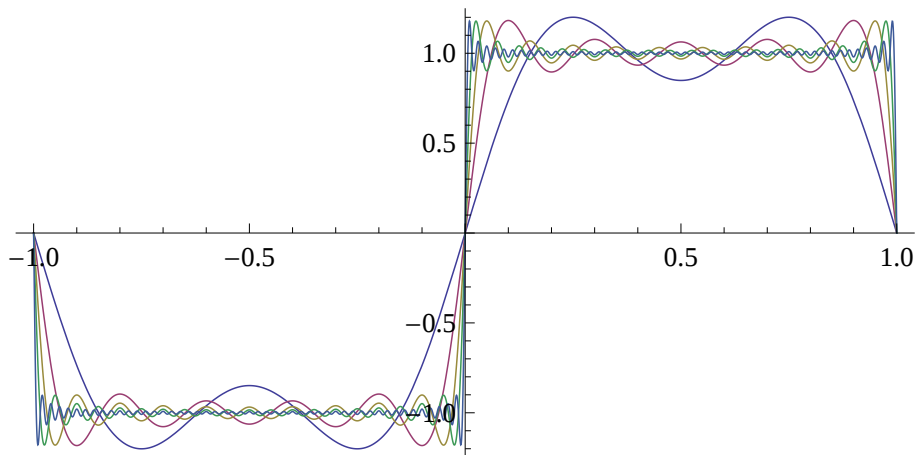


Abbildung 3.2: *Fourierreihe für $\text{sign}(x)$ für $n = 2, 5, 10, 20, 50$*

Betrachten wir nun Signal mit der Periode zwei, das heisst, wir ändern das Zeitmass entsprechend. Sei nun $f(t)$ eine Funktion mit Periode zwei, also $f(t+2) = f(t)$. Dann lässt sich die ganze Funktion durch die Werte im Intervall $[-1, 1]$ beschreiben, wobei $f(1) = f(-1)$ gilt. Beispiele von solchen Funktionen sind die Funktionen $f(x) = \cos(n\pi x)$ und $f(x) = \sin(n\pi x)$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt dann der folgende Satz der Fourieranalyse:

Satz 3.1. *Sei $f(x)$ stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x) ,$$

wobei

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) \, dx , \quad b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) \, dx .$$

Die Approximation durch die Reihe ist gleichmässig.

Diesen Satz zu beweisen würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.

Die periodische Funktion $f(x)$ wird also durch eine Reihe von immer höheren Frequenzen dargestellt. Da das menschliche Ohr nur Töne im Bereich von etwa 16–19000 Hertz hören kann, können wir die Frequenzen über 19000 Hertz weglassen. Somit wird die Reihe endlich.

Beispiel 3.2. Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Da $\cos(n\pi x)$ eine gerade Funktion ist, haben wir $a_n = 0$. Weiter gilt

$$b_n = \int_{-1}^1 \text{sign}(x) \sin(n\pi x) \, dx = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) \, dx = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) .$$

Somit ist $b_{2n} = 0$ und $b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}$. Also ist die Fourierreihe

$$\text{sign}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\pi x) .$$

■

Betrachten wir den Ausdruck $a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$. Erinnern wir uns an die trigonometrische Formel

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta .$$

Der Punkt $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ liegt auf dem Einheitskreis. Da der Punkt $(\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}})$ ebenfalls auf dem Einheitskreis liegt, gibt es einen Winkel θ_n , so dass

$$\left(\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right) = (\cos \theta_n, \sin \theta_n) .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x) &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} [\sin \theta_n \cos(n\pi x) + \cos \theta_n \sin(n\pi x)] \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(n\pi x + \theta_n) . \end{aligned}$$

Dies ergibt nun die Formel

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(n\pi x + \theta_n) ,$$

Da das menschliche Ohr nicht alle Frequenzen hören kann, hört nur endlich viele Frequenzen. Also neben dem Grundton, den Ton, der eine Oktave höher liegt, den Ton, der eine Oktave und eine Quint höher liegt, den Ton der zwei Oktaven höher liegt, etc.

Welche Töne man wie laut hört, ist durch die physikalischen Eigenschaften des Instruments bestimmt. Insbesondere hat der Resonanzkörper die Eigenschaft, ein bestimmtes Spektrum an Tönen zu verstärken. Addiert man alle diese Obertöne, erhält man den spezifischen Klang des Instrumentes.