

2. Die Vermessung der Erde und des Sonnensystems

Für viele Aufgaben im Bauwesen spielt Geometrie eine Rolle. Um Referenzpunkte bestimmen zu können, oder über grössere Distanzen messen zu können, sind Dreiecke besonders wichtig. Drei Eigenschaften spielen dabei eine Rolle:

- (Winkelsumme) die Summe der drei Winkel im Dreieck ist π (180°).
- (Strahlensätze) sind die drei Winkel in den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ gleich, so sind die Seitenverhältnisse $\|AB\|/\|A'B'\| = \|AC\|/\|A'C'\| = \|BC\|/\|B'C'\|$.
- (Satz des Pythagoras) in einem rechtwinkligen Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

2.1. Rechte Winkel

Der Satz des Pythagoras (ca. 570–510) war schon den Babyloniern bekannt. Auf einer Keilschrifttafel aus der Zeit der Hammurabi-Dynastie (ca. 1830–1530) findet man eine Aufgabe mit Lösung, bei der der Satz von Pythagoras angewendet wird. Weiter war der Satz auch in Indien und China bekannt. Ob die Babylonier den Satz aber auch bewiesen haben, ist unbekannt.

Ein einfacher Beweis geht folgendermassen: Man teilt ein Quadrat mit Seitenlänge $a + b$ folgendermassen auf:

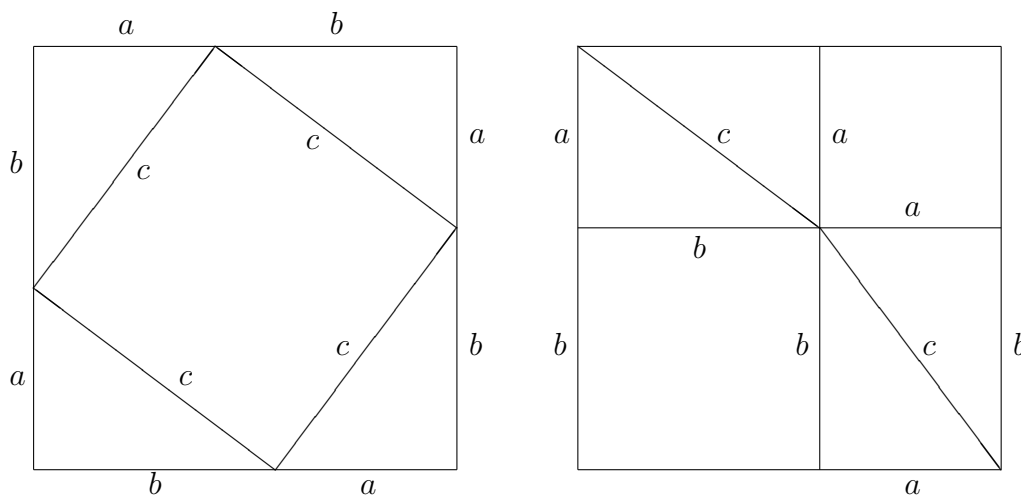


Abbildung 2.1: *Beweis des Satzes des Pythagoras*

fig:bew-pyta

Die vier Dreiecke kommen dabei in beiden Konstruktionen vor.

Das einfachste Dreieck, das $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt, ist $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Da ein Dreieck durch die Seitenlängen eindeutig bestimmt ist, kann dieses Dreieck zur Konstruktion eines rechten Winkels verwendet werden. Man nimmt ein Seil mit 13 Knoten in gleichen Abständen und bildet dann ein Dreieck mit Seitenlängen 3, 4, 5. Dann befindet sich gegenüber der längsten Seite ein rechter Winkel. Auf diese Weise kann man einen rechten Winkel in einem Gebäude bilden, oder einen Pfahl senkrecht auf den Boden stellen.

2.2. Der Tunnel des Eupalinos

Herodot (482–424) berichtet, dass der Architekt Eupalinos auf der Insel Samos einen Tunnel durch einen Berg bauen liess, um Wasser von der Agiades-Quelle zur Stadt Samos (heute Pythagorion) zu leiten. Der Tunnel ist 1036 Meter lang, und wurde im Gegenvortrieb gebaut. Man vermutet, dass der Tunnel zwischen 550 und 530 mit einer Bauzeit von 8–15 Jahren gebaut wurde. Der Tunnel hat praktisch kein Gefälle.

Um so einen Tunnel zu bauen, stellen sich zwei Probleme:

- Wie bestimmt man auf zwei Seiten eines Berges zwei Punkte, die auf gleicher Höhe liegen?
- Wie bestimmt man die Richtung, in der man den Tunnel graben muss.

Eupalinos hat das Problem (ob Pythagoras mitgeholfen hat, wurde spekuliert, man hat aber keine Indizien gefunden) hervorragend gelöst. Am Verbindungspunkt war der Höhenunterschied 60 cm.

Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten, die Vermessung vorzunehmen:

- Messung um den Berg herum.
- Messung über den Berg.

Die Messung um den Berg herum scheint einfacher. Es wird ein Chorobates (eine ca. 6 m lange Wasserwaage) zur horizontalen Peilung verwendet. Damit kann man einen Punkt auf gleicher Höhe bestimmen. Auf diese Weise kann man um den Berg herum peilen. Bestimmt man einen zusätzlichen Punkt, dessen Entfernung man messen kann, lassen sich über die Bestimmung der Winkel Dreiecke auf einer Karte zeichnen, so dass der genaue Punkt bestimmt werden kann, wo man den Tunnel beginnen soll. Die Strahlensätze stellen sicher, dass die Längen auf der Karte und

in der Wirklichkeit immer das gleiche Verhältnis aufweisen. Durch die Karte kennt man auch den Winkel zur Verbindungsgerade zum Punkt auf der anderen Seite des Berges. Das Problem bei dieser Methode ist, dass man wegen der Topographie sehr viele Messungen braucht, und dass dadurch durch kleinere Fehler eine Ungenauigkeit erzeugt wird.

Bei der Messung über den Berg misst man die Winkel und Längen und bestimmt dadurch die Höhe eines Punktes. Stellt man an den Messpunkten Stangen senkrecht auf, so kann man auch sichergehen, dass die Messpunkte auf einer Geraden liegen. Man hat die Möglichkeit, die Abstände zwischen den Messpunkten direkt zu messen, oder auch über Dreiecke mittels Hilfspunkten, die vermessen werden. Da man in einer “Gerade” über den Berg misst, kennt man auch die Richtung, in die man den Tunnel vorbeitragen muss. Auch bei dieser Methode ist das Problem, dass man zuviele Messungen braucht, wodurch das ganze Verfahren ungenau wird.

Eupalinos war sich möglicher Ungenauigkeiten bewusst. Kurz vor dem Aufeinandertreffen der beiden Stollen, biegen beide Stollen nach Osten ab. Auf diese Weise müssen sich die Stollen schneiden, wenn sie sich auf ungefähr gleicher Höhe befinden.

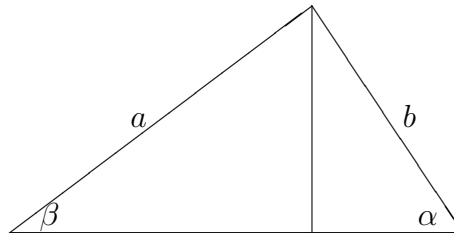


Abbildung 2.2: Sinussatz

fig:sinussatz

Die Vermessung wurde 1615 durch Willebrord van Roijen Snell verbessert. Er verwendete den Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

2.3. Die Bestimmung des Erdraduisses

Dass die Erde eine Kugel ist, war den Griechen schon länger bekannt. Entfernten sich Schiffe, verschwand zuerst der untere Teil. Daraus schloss man, dass die Erdoberfläche gekrümmt ist. Eine andere Beobachtung war, dass man in Ägypten andere Sterne sah als in Griechenland. Aristoteles (384–322) beobachtete, dass der

Erdschatten bei einer Mondfinsternis rund war. Da die Sonne bei verschiedenen Mondfinsternissen von verschiedenen Seiten schien, und der Schatten immer rund war, war Beweis, dass die Erde eine Kugel ist.

Aristoteles war der erste, der die Frage nach dem Umfang der Erde stellte. Der erste, der wissenschaftlich den Umfang bestimmte war Eratosthenes von Kyrene (ca. 275–194). Er war Leiter der Bibliothek von Alexandria. Der Legende nach wurde Eratosthenes darauf aufmerksam, dass es in Syene (Assuan) einen Brunnen gab, wo die Sonne am 21. Juni die ganze Wasseroberfläche im Schacht beschien. Eratosthenes schloss daraus, dass die Sonne am 21. Juni senkrecht auf Syene scheint. Da er annahm, dass Alexandria und Syene auf demselben Meridian liegen, mit einem Gnomon (eine innen mit einer Gradeinteilung ausgestattete Halbkugel mit einem senkrechten Zeiger) die Sonnenhöhe. Er fand heraus, der Schatten einen Fünzigstel des Kreises abdeckt. Daraus schloss er, dass die Strecke zwischen Syene und Alexandria ein Fünzigstel des Erdumfangs ist.

Eratosthenes wusste, dass der Abstand zwischen Alexandria und Syene 5000 Stadien betrug. Damit musste der Erdumfang 250 000 Stadien betragen. Es wird darüber spekuliert, welches Stadion Eratosthenes verwendete. Das ägyptische Stadion war 157.5 m, was den Erdumfang 39 375 km ergibt. Diese Genauigkeit erstaunt, da

- der Abstand der Städte 835 km ist, was 5302 ägyptischen Stadien entspricht.
- sich Syene (24°05'N 32°54'E) etwa 3° östlich von Alexandria (31°12'N 29°55'E) befindet. Der Radius des Breitenkreises in Syene ist $6371 \cdot \cos(24 \frac{2\pi}{360}) = 5820$ km, was einem Umfang von 36 569 km entspricht. 3° entsprechen somit 305 km. Das ergibt für den Nord-Süd Abstand der Städte $\sqrt{835^2 - 305^2} = 777.303$ km. Dies sind 4935 Stadien. Somit haben sich zwei Ungenauigkeiten ausgeglichen.
- Syene liegt etwa ein halbes Grad nördlich des Wendekreises (23°26'). Der gemessene Winkel 7.2° ist leicht zu klein, so dass er sehr nahe am wirklichen Winkel 7.12° liegt.

2.4. Der Abstand Erde-Sonne

Der erste (bekannte) Mensch, der sich mit astronomischen Distanzbestimmungen beschäftigte, war Aristarch von Samos (310–250). Er glaubte, dass die Sonne ein grosses Feuer sei. Er erkannte, dass der Mond kein eigenes Licht hat, sondern von

der Sonne beschienen wird. Durch die Form des Schattens auf dem Mond erkannte man auch, dass der Mond eine Kugel sein muss.

Um den Abstand der Erde von der Sonne zu bestimmen, bemerkte er zuerst, dass bei Halbmond der Winkel zwischen Erde und Sonne vom Mond ausgesehen ein rechter Winkel sein muss. Aristarch mass nun den Winkel zwischen Mond und Sonne bei Halbmond. Er fand den Winkel 87° . Bedenkt man, dass die Messung sehr schwierig ist, ist dies sehr nahe am tatsächlichen Winkel 89.85° . Da der Winkel von der Sonne her sehr klein ist, erhalten wir näherungsweise

$$\frac{\text{Erde-Mond}}{\text{Erde-Sonne}} \approx 3 \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{60} \approx 0.0523599 \approx \frac{1}{19.0986}.$$

($\sin 0.0523599 \approx 0.052336 \approx 1/19.1073$) Also schloss Aristarch, dass die Sonne 19 Mal soweit entfernt ist wie der Mond. Das richtige Verhältnis ist etwa 390 Mal.

2.5. Die Grösse der Sonne

Man hatte festgestellt, dass bei einer Sonnenfinsternis der Mond die Sonne gerade verdeckt. Das heisst, dass von der Erde aus gesehen Mond und Sonne scheinbar gleich gross sind. Aristarch benutzte diese Tatsache, um die Grösse der Sonne zu bestimmen. Aus dem Strahlensatz schloss er damit, dass die Sonne 19 Mal so gross ist wie der Mond. Der wirkliche Durchmesser der Sonne ist etwa 400 Mal der Durchmesser des Mondes.

2.6. Der Durchmesser des Mondes

Aristarch stellte fest, dass der Mond etwa $1/15$ eines Tierkreiszeichens verdeckt. Da es zwölf Tierkreiszeichen gibt, sieht man den Mond also unter einem Winkel von $360/(12 \cdot 15) = 2$ Grad. Aristarch hatte sich aber verschätzt, es sind in Wirklichkeit nur 0.52° . Auf dem Einheitskreis entsprechen 2 Grad einer Länge von $2 \cdot 2\pi/360 \approx 0.0349$. Somit beträgt der Durchmesser des Mondes 3.5% des Abstandes Erde-Mond, und damit der Durchmesser der Sonne 66.5% des Abstandes Erde-Mond.

Durch diese Beobachtungen kann man noch nicht entscheiden, ob Mond, Erde oder Sonne grösser sind. Aristarch machte folgende Beobachtung. Bei einer Mondfinsternis gibt es drei Phasen: Beginn bis zur völligen Verdunklung, völlige Verdunklung, und Beginn der Aufhellung bis zum Ende der Mondfinsternis. Bei einer Mondfinsternis, bei der der Mond durch die Mitte des Erdschattens geht, dauern die drei Phasen alle etwa eine Stunde. Daraus schloss Aristarch, dass der Mond zwei Mal

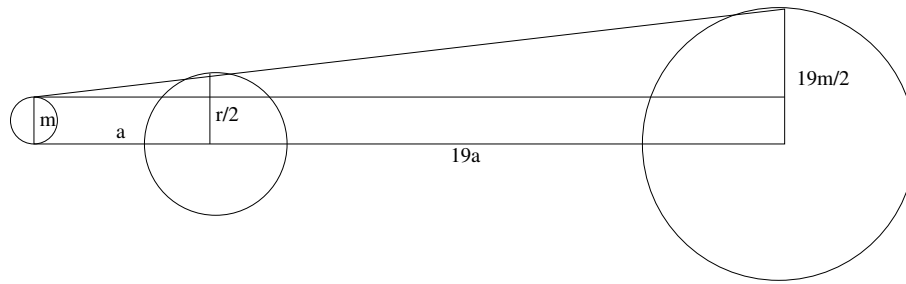
Abbildung 2.3: *Mondfinsternis*

fig:mond.sonne

im Erdschatten Platz hat. Da die Sonne 19 Mal so weit entfernt ist wie der Mond, und die Sonne 19 Mal so gross ist wie der Mond, konnte Aristarch aus einer Zeichnung den Mondradius bestimmen. Wir können den Mondradius auch (annähernd) berechnen. Unter der Annahme, dass die betrachteten Dreiecke rechtwinklig sind erhalten wir aus dem Strahlensatz die Verhältnisse

$$\frac{r/2 - m}{a} = \frac{19m/2 - m}{20a}.$$

Daraus errechnen wir

$$m = \frac{20r}{57} \approx 0.3509r.$$

Der Durchmesser des Mondes ist also etwa 35% des Durchmessers der Erde. Damit ist der Durchmesser der Sonne etwa 6.66 Mal so gross wie der Durchmesser der Erde. In Wirklichkeit ist der Durchmesser des Mondes etwa 27% des Erddurchmessers, und der Durchmesser der Sonne 109 Mal der Durchmesser der Erde. Bedenkt man aber die Instrumente, die Aristarch zur Messung zur Verfügung hatte, sind die Resultate eine beachtliche Leistung.

Da Aristarch nun wusste, dass die Sonne grösser ist als die Erde, schloss er daraus, dass nicht die Erde, sondern die Sonne im Zentrum des Universums stehen müsste. Er war somit der erste bekannte Vertreter des heliozentrischen Weltbildes.

2.7. Welche Form hat die Welt?

Mit physikalischen Methoden und der Relativitätstheorie kann man messen und berechnen, wie weit die weitesten Sterne entfernt sind. Man schätzt, dass der Durchmesser des Universums etwa 78 Milliarden Lichtjahre beträgt. Aus der Serie “Raumschiff Enterprise” kennen wir den Satz: “Das Weltall — unendliche Weiten”. Aber ist unsere Welt unendlich? Hat die Welt überhaupt die dreidimensionale Form, die wir uns vorstellen?

Wollen wir erkennen, wie unsere Welt aussieht, haben wir ein grosses Problem. Wir erleben unsere Welt dreidimensional (wir kümmern uns im Moment nicht um die Zeit). Für uns sieht es aus, als ob wir in einem dreidimensionalen Euklidischen Raum leben. Dieses Gefühl beeinflusst unser Denken. Weiter ist es für uns sehr schwierig, uns mehr als drei Dimensionen vorzustellen.

Damit wir uns mehr Dimensionen vorstellen können, müssen wir die Dimension unserer Welt verkleinern. Stellen wir uns also eine zweidimensionale Welt vor, in der (intelligente) Schattenwesen leben. Da die Schatten zweidimensional sind, ist für sie die Welt eine Euklidische Ebene. Diese Schattenwesen würden nun die selben Überlegungen wie wir machen, indem sie sich Strichmännchen auf einer Gerade oder anderen eindimensionalen geometrischen Objekten vorstellen.

Diese Schattenwesen könnten nun aber auf der Oberfläche eines endlichen dreidimensionalen Körpers leben. Da diese Wesen Mühe haben, sich eine dreidimensionale Welt vorzustellen, und sich das Licht auch auf der Oberfläche des Körpers fortbewegt, erleben sie den Weltraum als unendliche Ebene.

Stellen wir uns als erstes Modell vor, die Schattenwesen leben auf der Oberfläche einer sehr grossen Kugel. Wenn es den Schattenwesen einmal gelingt, so empfindliche Messgeräte zu entwickeln, dass sie die Welt weit entfernt ein zweites Mal sehen könnten, so hätten sie den Beweis, dass die Welt endlich ist. Da die Schattenwesen sich nicht am Rande des Universums befinden, scheint diese Möglichkeit aber nicht realistisch, da es in jeder Richtung Sterne gibt, deren Licht so eine Messung stört.

Die Schattenwesen müssten in so einem Modell Geometrie betreiben. So wissen sie, dass in der Euklidischen Geometrie die Winkelsumme eines Dreiecks 180° (π) beträgt. Betrachten wir ein Dreieck auf der Kugeloberfläche, so sehen wir sofort, dass auch Winkelsummen grösser als 180° möglich sind. In der Tat lässt sich zeigen, dass in einem sphärischen Dreieck die Winkelsumme immer grösser als 180° sein muss. Die Schattenwesen müssten also, am besten mit zwei Raumsonden, ein grosses Dreieck aufspannen, und die Winkelsumme messen. Wäre diese Summe grösser als 180° , so wüssten die Schattenwesen, dass die Vorstellung von der Euklidischen Ebene falsch ist.

Es zeigt sich, dass die Winkelsumme in einem Dreieck von der Krümmung abhängt. Ist eine Fläche immer auf die selbe Seite gewölbt, so wird die Winkelsumme im Dreieck grösser als 180° . In Gebieten, so die eine Richtung nach innen gewölbt ist, und die andere Richtung nach aussen, dort wird die Winkelsumme im Dreieck kleiner als 180° (z.B. auf einem Sattel).

Aus der Winkelsumme 180° können wir aber noch keine Schlüsse ziehen. Nehmen wir an, die Schattenwesen leben auf einem unendlichen Zylinder. Wir können uns fragen, ob so ein Modell Sinn macht, da der Raum nicht mehr homogen wird. Wir haben eine Richtung, in der sich die Welt unendlich weit ausdehnt. Senkrecht dazu haben wir eine Richtung, in der wir wieder zurückkommen. Der Zylinder kann folgendermassen konstruiert werden. Wir nehmen ein Blatt Papier mit einer unendlichen Länge und einer endlichen Breite. Dann rollen wir das Papier auf, und kleben die Kanten zusammen. Das Aufrollen verändert weder Distanzen noch Winkel. Somit wird die Winkelsumme eines Dreiecks 180° bleiben. In diesem Modell könnten die Schattenwesen also nur die Zylinderform erkennen, wenn es ihnen gelingen würde, einmal um die Welt zu reisen. Oder wenn sie Radiowellen auffangen würden, die sie früher einmal ausgesendet haben. Wie lange dies in unserem Fall gehen würde, können wir abschätzen, wenn wir wissen, dass die Wellen länger als 78 Milliarden Jahre hätten, um uns zu erreichen. Wir sollten dabei bedenken, dass der Homo Sapiens seit ungefähr zwei Millionen Jahren die Erde bevölkert.

Komplizierter wird es bei einem Torus (ein Ring, dessen Querschnitt ein Kreis ist). Messen wir die Winkelsumme eines Dreiecks auf der Aussenseite, so wird die Winkelsumme grösser als 180° , auf der Innenseite kleiner als 180° . Es gibt auch Dreiecke, deren Winkelsumme genau 180° beträgt. Basteln wir uns einen Torus im dreidimensionalen Raum, so formen wir zuerst einen Zylinder aus einem endlichen Stück Papier. Dann aber müssen wir den Zylinder verformen, um auch das andere Ende zusammenfügen zu können. Daher hängt die Geometrie vom Standpunkt ab. Ob es Sinn macht, dass auf dem Jupiter die Geometrie anders ist als auf der Erde, müsste man diskutieren. Durch die notwendige Verformung aber, hätten die Schattenwesen immer noch die Möglichkeit zu erkennen, dass sie nicht in einer Euklidischen Ebene leben.

Wollen wir nun einen Torus basteln, bei dem wir das Blatt nicht verformen müssen, brauchen wir mehr Dimensionen. Würden wir in einem vierdimensionalen Raum leben, könnten wir den Zylinder in die vierte Dimension biegen, und dann die Ecken zusammenkleben. So einen flachen Torus können wir durch die Abbildung

$$[0, 360)^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos \vartheta, \sin \vartheta, \cos \varphi, \sin \varphi)$$

definieren. Da wir dann das Blatt nicht mehr verbiegen müssen, sind Längen und Winkel gleich wie auf der Ebene. Der Raum ist sogar homogen, das heisst, die Geometrie ist nicht vom Ort oder von der Richtung abhängig. Den flachen Torus könnten die Schattenwesen also von der Kugeloberfläche dadurch unterscheiden, dass

die Winkelsumme im Dreieck 180° ist.

In einer endlichen Welt gibt es aber nicht nur Dimensionen, sondern auch Orientierung. Stellen wir uns Schattenwesen auf einem Möbiusband vor. Ein Möbiusband konstruiert man folgendermassen. Man nimmt ein Band und klebt die Enden so zusammen, dass die Rückseite auf die Vorderseite trifft. Würde es einem Schattenwesen oder einem unbemannten Raumschiff gelingen, das Universum zu umrunden, so wäre bei der Rückkehr alles seitenverkehrt. In einem Koordinatensystem wären dann x und y -Achse vertauscht. Man muss sich also Experimente ausdenken, um so eine Änderung der Orientierung entdecken zu können. In einer dreidimensionalen Welt würde sich ein Rechtssystem plötzlich in ein Linkssystem verwandeln. Beim flachen Torus müsste also der Kreis, der um die z -Achse rotiert, zusätzlich eine halbe Drehung vollführen (z -Achse bezieht sich hier auf das dreidimensionale Bild). Im vierdimensionalen Raum kann man sich solche Gebilde definieren (z.B. die Kleinsche Flasche). Um hier experimentelle Gewissheit zu bekommen, können wir im Moment nur hoffen, dass die Voyager-Sonde eines Tages zurückkehrt.

Im Moment bleibt uns nichts anderes übrig, als mit Gedankenexperimenten uns ein Bild von der Welt zu machen. Vielleicht wird die Weltformel, die die Physiker suchen, die Anzahl der möglichen Ausformungen der Welt einschränken und uns eventuell erzählen, in wie vielen Dimensionen wir denken müssen.