Klausur

1. Eine Krankheit ist genetisch bedingt, und tritt auf, falls beide Gene eine bestimmte Mutation aufweisen. Tritt die Krankheit auf, stirbt die Person, bevor sie sich fortpflanzen kann, das heisst, noch als Kind. Wir benützen folgendes Modell. Ein Kind bekommt unabhängig von einander je ein Gen von Vater und Mutter. Die Eltern geben jedes ihrer beiden Gene mit gleicher Wahrscheinlichkeit weiter. In der erwachsenen Bevölkerung ist, unabhängig vom Geschlecht, der Anteil der Personen, die kein mutiertes Gen tragen α. Die Paarbildung geschieht unabhängig davon, ob die Personen ein mutiertes Gen tragen oder nicht.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind krank ist, und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind kein mutiertes Gen hat.

b) Berechnen Sie den Anteil der erwachsenen Bevölkerung der nächsten Generation, die kein mutiertes Gen trägt.

c) Wir nehmen an, dass die Krankheit schon sehr lange existiert, und dass damit der Anteil $\alpha \in [0,1]$ stabil ist, das heisst, sich nicht in der nächsten Generation ändert. Berechnen Sie α.

d) Interpretieren Sie das Resultat aus c).

2. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Ereignisse ($A_k \in \mathcal{F}$).

a) Drücken Sie folgende Ereignisse mit Hilfe von $A_1, \ldots, A_n$ aus:

i) $M_k =$ “mindestens k der Ereignisse treten ein”.

ii) $G_k =$ “genau k der Ereignisse treten ein”.

b) Sei $Z = \sum_{k=1}^n 1\!\!1_{A_k}$ die Anzahl der eingetroffenen Ereignisse. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[A_k] = \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}[G_k] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[M_k] \; .$$

3. Eine Münze wird unendlich oft geworfen, wobei die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges p ist. Die Variable Y_k ist 1, falls im k-ten Wurf ein Erfolg eintritt, und 0, falls ein Misserfolg eintritt. Die Variablen $\{Y_k\}$ seien unabhängig. Wir definieren die Variablen

$$N_n = \min\{k \geq n : Y_k = 0\} - n \;,$$

die Länge einer Erfolgssträhne mit Start in n. Wir definieren die Funktion

$$f(n) = \left\lfloor a \frac{\log n}{-\log p} \right\rfloor \;,$$

wobei $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ den Ganzzahlteil der Zahl x bezeichnet und $a > 0$ eine Konstante ist. Bezeichnen wir mit $A_n = \{N_n \geq f(n)\}$.

a) Berechnen Sie $\mathbb{P}[A_n]$ und schätzen Sie $\mathbb{P}[A_n]$ nach oben ab.

b) Sei $a > 1$. Tritt A_n endlich oder unendlich oft ein?

c) Können Sie mit dem gleichen Argument auch die Frage im Falle $a \leq 1$ beantworten? Geben Sie eine Begründung für Ihre Antwort.

4. Die Variable α hat eine $\Gamma(\gamma, \beta)$ Verteilung, das heisst, Dichte

$$f(x) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} \mathrm{e}^{-\beta x} \mathbb{1}_{x>0} \;, \qquad\qquad \gamma, \beta > 0 \;.$$

Erinnern Sie sich, dass die Gammafunktion $\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty x^{\gamma-1} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ die Eigenschaft $\Gamma(\gamma+1) = \gamma\Gamma(\gamma)$ hat. Gegeben α, ist die Variable X exponential verteilt mit Parameter α, d.h. Dichte $\alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathbb{1}_{x>0}$.

a) Bestimmen Sie die Randverteilung von X, und berechnen Sie Mittelwert und Varianz von X.

b) Es wird $X = x$ beobachtet. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von α gegeben $\{X = x\}$.

5. Die Daten $\{X_k : 1 \le k \le n\}$ haben die Verteilung $\mathbb{P}[X_k = \ell] = (\ell+1)p^\ell(1-p)^2$ für $\ell \in \mathbb{N}$ und ein $p \in (0,1)$. Seien weiter Y_1, Y_2 unabhänige geometrisch verteilte Variablen, d.h. mit Verteilung $\mathbb{P}[Y_k = \ell] = p^\ell(1-p)$.

a) Berechnen Sie die Verteilung von $Y_1 + Y_2$.

b) Schätzen Sie den Parameter p aus den Daten $\{X_k : 1 \le k \le n\}$ mit der Momentenmethode.

c) Schätzen Sie den Parameter p aus den Daten $\{X_k : 1 \le k \le n\}$ mit der Maximum-Likelihood-Methode.

d) Vergleichen Sie die beiden Schätzer.

6. Ein Junge sammelt kleine flache Steine, schreibt jeweils auf eine der grossen Seiten eine 1, auf die andere eine 0, und benützt den Stein zum Münzwurf. Er hat mit über 200 Steinen eine Statistik geführt, wie oft die 1 angezeigt wird. Seine Mutter, eine Statistikerin, berät den Jungen, wie er ein Spiel mit einem neuen Stein modellieren soll. Jeder Stein hat eine Erfolgswahrscheinlichkeit (für die 1) p. Der Parameter p schlägt sie vor, sei Beta $\beta(a,b)$ verteilt, das heisst, hat die Dichte

$$f(p) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1} .$$

Der Junge hat nun einen neuen Stein gefunden. Helfen Sie ihm bei folgenden Problemen:

a) Wie gross ist die Erfolgswahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X = 1]$ für den neuen Stein.

b) Von 10 Würfen mit dem neuen Stein ist 4 Mal ein Erfolg und 6 Mal ein Misserfolg eingetreten. Berechnen Sie die aposteriori Dichte von p nach der Beobachtung der 10 Würfe.

c) Schätzen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeit mit der Bayes'schen Methode mit den Beobachtungen unter b).