

Lösung der Klausur

1. Sei XY das Gen des Kindes, wobei X von der Mutter stammt und Y vom Vater. Bezeichnet M mutiert und U nichtmutiert, so sind die möglichen Kombinationen MM, MU, UM, UU . Für die Eltern bezeichnen wir die Kombinationen M_i und U_i , wenn der Elternteil $i \in \{m, v\}$ das Gen trägt bzw. nicht trägt.

- a) Ein Kind kann nur krank sein, wenn beide Eltern ein mutiertes Gen tragen. Das Kind kriegt dieses Gen je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Also gilt $\mathbb{P}[MM] = \frac{1}{2}\mathbb{P}[M_m]\frac{1}{2}\mathbb{P}[M_v] = \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2$. Die zweite Wahrscheinlichkeit wird

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[UU] &= \mathbb{P}[UU \mid U_m \cap U_v]\mathbb{P}[U_m \cap U_v] + \mathbb{P}[UU \mid U_m \cap M_v]\mathbb{P}[U_m \cap M_v] \\ &\quad + \mathbb{P}[UU \mid M_m \cap U_v]\mathbb{P}[M_m \cap U_v] \\ &\quad + \mathbb{P}[UU \mid M_m \cap M_v]\mathbb{P}[M_m \cap M_v] \\ &= \alpha^2 + 2\frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha) + \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2 = \frac{1}{4}(1 + \alpha)^2 . \end{aligned}$$

- b) Wir müssen darauf bedingen, dass die Person nicht krank ist. Also

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[UU \mid MM^c] &= \frac{\mathbb{P}[UU \cap MM^c]}{\mathbb{P}[MM^c]} = \frac{\mathbb{P}[UU]}{1 - \mathbb{P}[MM]} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1 + \alpha)^2}{1 - \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2} = \frac{1 + \alpha}{3 - \alpha} . \end{aligned}$$

- c) Wir müssen die Gleichung $(3 - \alpha)^{-1}(1 + \alpha) = \alpha$ lösen. Die einzige Lösung ist $\alpha = 1$.
- d) Die Krankheit stirbt aus.

2. a) i) Wir haben

$$M_k = \bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) .$$

- ii)

$$\begin{aligned} G_k &= M_k \cap M_{k+1}^c \\ &= \left[\bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) \right] \cap \left[\bigcap_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k < i_{k+1} \leq n} \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} A_{i_j}^c \right) \right] . \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_k}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[A_k] \\
&= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}\left[\sum_{\ell=1}^n \mathbb{1}_{A_\ell} = k\right] = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}[G_k] = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}[G_k] = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^k \mathbb{P}[G_k] \\
&= \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=\ell}^n \mathbb{P}[G_k] = \sum_{\ell=1}^n \mathbb{P}[\cup_{k=\ell}^n G_k] = \sum_{\ell=1}^n \mathbb{P}[M_k] .
\end{aligned}$$

3. a) Damit A_n eintritt, müssen die Würfe $n, n+1, \dots, n+f(n)-1$ erfolgreich sein. Also ist die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[A_n] = p^{f(n)} \leq p^{\{a \log n / (-\log p)\} - 1} = p^{-1} e^{-a \log n} = p^{-1} n^{-a} .$$

b) Da $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] \leq p^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} < \infty$, tritt nach dem Borel–Cantelli-Lemma das Ereignis nur endlich oft ein.

c) Die Abschätzung nach unten ist $\mathbb{P}[A_n] \geq n^{-a}$. Ist $a \leq 1$, so sind diese Wahrscheinlichkeiten nicht summierbar. Da die Ereignisse A_n abhängig sind (tritt A_n ein, so ist $N_{n+1} \geq f(n) - 1$), kann das Borel–Cantelli-Lemma hier nicht (direkt) angewendet werden.

Man kann zeigen, dass $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} -N_n \log p / \log n = 1$. Ist $a < 1$, so summiert man nur über n der Form $n_k = \lfloor -k \log k / \log p \rfloor$, so dass die Unabhängigkeit der Ereignisse A_{n_k} gilt.

4. Die gemeinsame Verteilung von α, X ist

$$f_{\alpha, X}(a, x) = a e^{-ax} \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} a^{\gamma-1} e^{-\beta a} \mathbb{1}_{a>0, x>0} = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} a^\gamma e^{-a(\beta+x)} \mathbb{1}_{a>0, x>0} .$$

a) Integrieren wir über a , erhalten wir für $x > 0$

$$\frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty a^\gamma e^{-a(\beta+x)} da = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\beta+x)^{\gamma+1}} = \frac{\gamma \beta^\gamma}{(\beta+x)^{\gamma+1}} .$$

Dies ist die Dichte der Paretoverteilung $F_X(x) = 1 - (\beta/(\beta+x))^\gamma$.

Der Mittelwert ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty x \frac{\gamma \beta^\gamma}{(\beta+x)^{\gamma+1}} dx = \int_0^\infty \frac{\gamma \beta^\gamma}{(\beta+x)^\gamma} dx - \beta = \frac{\gamma \beta^\gamma}{(\gamma-1) \beta^{\gamma-1}} - \beta \\
&= \frac{\gamma \beta}{\gamma-1} - \beta = \frac{\beta}{\gamma-1} ,
\end{aligned}$$

falls $\gamma > 1$. Ist $\gamma \leq 1$, so ist der Mittelwert unendlich.

Das zweite Moment wird

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^\infty x^2 \frac{\gamma\beta^\gamma}{(\beta+x)^{\gamma+1}} dx = \int_0^\infty \frac{\gamma\beta^\gamma}{(\beta+x)^{\gamma-1}} dx - 2\beta \frac{\beta}{\gamma-1} - \beta^2 \\ &= \frac{\gamma\beta^\gamma}{(\gamma-2)\beta^{\gamma-2}} - \frac{(\gamma+1)\beta^2}{\gamma-1} = \frac{2\beta^2}{(\gamma-2)(\gamma-1)},\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Gleichung das Resultat für den Erwartungswert verwendet haben. Das zweite Moment ist endlich, falls $\gamma > 2$ und unendlich, falls $\gamma \leq 2$. Für die Varianz erhalten wir

$$\text{Var}[X] = \frac{2\beta^2}{(\gamma-2)(\gamma-1)} - \left(\frac{\beta}{\gamma-1}\right)^2 = \frac{\gamma\beta^2}{(\gamma-2)(\gamma-1)^2}.$$

b) Nach der Formel ist die bedingte Verteilung

$$f_{\alpha|X=x}(a) = \frac{\frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} a^\gamma e^{-a(\beta+x)}}{\frac{\gamma\beta^\gamma}{(\beta+x)^{\gamma+1}}} \mathbb{1}_{a>0} = \frac{(\beta+x)^{\gamma+1}}{\Gamma(\gamma+1)} a^\gamma e^{-a(\beta+x)} \mathbb{1}_{a>0}.$$

Dies ist eine $\Gamma(\gamma+1, \beta+x)$ -Verteilung.

5. a) Die Formel ergibt

$$\mathbb{P}[Y_1+Y_2 = \ell] = \sum_{k=0}^{\ell} p^k (1-p) p^{\ell-k} (1-p) = (1-p)^2 p^\ell \sum_{k=0}^{\ell} 1 = (\ell+1)p^\ell (1-p)^2.$$

b) Der Erwartungswert der geometrischen Verteilung ist $\mathbb{E}[Y_k] = p/(1-p)$, also ist $\mathbb{E}[X_k] = 2p/(1-p)$. Für die Momentenmethode, schätzen wir den Parameter aus $2p/(1-p) = n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k$. Also,

$$\hat{p} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k}{2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{2n + \sum_{k=1}^n X_k}.$$

c) Der Likelihood ist

$$L = \prod_{k=1}^n (x_k + 1) p^{x_k} (1+p)^2 = (1-p)^{2n} p^{\sum_{k=1}^n x_k} \prod_{k=1}^n (x_k + 1),$$

der Log-Likelihood

$$\ell = 2n \log(1-p) + \log p \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n \log(1+x_k).$$

Aus der Ableitung finden wir die Gleichung

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{p} - \frac{2n}{1-p} = 0.$$

Da die zweite Ableitung negativ ist, handelt es sich um ein Maximum. Wir erhalten

$$\hat{p} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{2n + \sum_{k=1}^n X_k}.$$

d) Die beiden Schätzer sind identisch.

6. a) Ist p bekannt, ist die Erfolgswahrscheinlichkeit p . Also ist die Erfolgswahrscheinlichkeit für einen neuen Stein

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[p] &= \int_0^1 p \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 p^a (1-p)^{b-1} dp \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{a}{a+b}. \end{aligned}$$

b) Die apriori Wahrscheinlichkeit des gesuchten Ereignisses ist

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp \\ &= \binom{10}{4} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 p^{a+3} (1-p)^{b+5} dp \\ &= \binom{10}{4} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+4)\Gamma(b+6)}{\Gamma(a+b+10)}. \end{aligned}$$

Die Dichte auf dem Ereignis "vier Mal 1, sechs Mal 0" ist

$$\binom{10}{4} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a+3} (1-p)^{b+5} \mathbb{1}_{0 < p < 1}.$$

Somit erhalten wir für die aposteriori Dichte

$$\frac{\binom{10}{4} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a+3} (1-p)^{b+5}}{\binom{10}{4} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+4)\Gamma(b+6)}{\Gamma(a+b+10)}} \mathbb{1}_{0 < p < 1} = \frac{\Gamma(a+b+10)}{\Gamma(a+4)\Gamma(b+6)} p^{a+3} (1-p)^{b+5} \mathbb{1}_{0 < p < 1}.$$

Es würde auch genügen, nur den Zähler zu bestimmen. Das zeigt, dass die Dichte proportional zu $p^{a+3}(1-p)^{b+5}$ ist. Daher kann man die Konstanten so bestimmen, dass man eine Dichte erhält, was sofort zum Resultat führt.

c) Mit der aposteriori Dichte müssen wir den Mittelwert bestimmen. Aus b) folgt mit Hilfe von a) der Schätzer $\hat{p} = (a+4)/(a+b+10)$.