Nachklausur

1. Die Daten $\{X_k : 1 \le k \le n\}$ haben die Verteilung $\mathbb{P}[X_k = \ell] = (\ell+1)p^\ell(1-p)^2$ für $\ell \in \mathbb{N}$ und ein $p \in (0,1)$. Seien weiter Y_1, Y_2 unabhänige geometrisch verteilte Variablen, d.h. mit Verteilung $\mathbb{P}[Y_k = \ell] = p^\ell(1-p)$.

a) Berechnen Sie die Verteilung von $Y_1 + Y_2$.

b) Schätzen Sie den Parameter p aus den Daten $\{X_k : 1 \le k \le n\}$ mit der Momentenmethode.

c) Schätzen Sie den Parameter p aus den Daten $\{X_k : 1 \le k \le n\}$ mit der Maximum-Likelihood-Methode.

d) Vergleichen Sie die beiden Schätzer.

2. Eine Reihe von n Lastwagen befährt eine Einbahnstrasse, auf der Überholen nicht möglich ist. Der i-te Lastwagenfahrer hat eine Geschwindigkeit V_i, mit der er gerne fahren möchte. Die $\{V_i\}$ sind unabhängige und identisch verteilte Variablen mit stetiger Verteilungsfunktion, das heisst, jeder Fahrer hat eine andere Lieblingsgeschwindigkeit. Somit bilden sich Kolonnen. Sei L die Länge der ersten Kolonne. Zum Beispiel, ist $V_1 > V_2$, so ist $L = 1$, ist $\min\{V_2, V_3, V_4\} > V_1 > V_5$, so ist $L = 4$. Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, dass $n = \infty$.

a) Erklären Sie, dass $L = \min\{n \ge 2 : V_n < V_1\} - 1$.

b) Berechnen Sie $\mathbb{P}[L = k]$.
Hinweis: Wie viele Anordnungen der ersten k Geschwindigkeiten gibt es, bei denen V_1 die kleinste ist?

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[L] = \infty$.

3. Seien $\{S'_n\}$, $\{S''_n\}$ und $\{S'''_n\}$ drei unabhängige Irrfahrten. Setzen wir $\boldsymbol{S}_n = (S'_n, S''_n, S'''_n)$, so erhalten wir eine Irrfahrt im Raum.

a) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty}(\pi n)^{3/2}\mathbb{P}[\boldsymbol{S}_{2n} = (0,0,0)] = 1$.

b) Zeigen Sie, dass die Irrfahrt den Punkt $(0,0,0)$ nur endlich oft besucht.

4. **a)** Sei N Poisson-verteilt mit Parameter λ. Berechnen Sie die bedingte Verteilung von N gegeben $N \geq 1$.

Nach einem Verbrechen in Los Angeles (ca. 9.000.000 männliche Einwohner) wird eine DNA-Spur sichergestellt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die DNA eines zufälligen Mannes mit der Spur übereinstimmt, ist 1/2.000.000. Ein Mann wird verhaftet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Mann der Täter ist, falls

b) Indizien ergeben, dass der Verhaftete mit 10% Wahrscheinlichkeit der Täter ist, bevor der DNA-Test durchgeführt wurde. Als Vereinfachung nehmen wir an, es gibt 10 Männer, die mit je 10% Wahrscheinlichkeit der Täter sein könnten. Der DNA-Test des Verhafteten ergibt, dass die DNA übereinstimmen.
Hinweis: Wenn k der 10 Personen ein übereinstimmendes DNA haben, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Verhaftete der Täter ist $1/k$.

c) Die Polizei hat mit einem Massen-DNA-Test begonnen. Der Verhaftete ist der erste, dessen DNA übereinstimmt. Wir nehmen an, dass alle Männer in Los Angeles mit der gleichen DNA mit der gleichen Wahrscheinlichkeit der Täter sind.
Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Approximation.

5. Ein Manager darf in zwei Aktien investieren. Der Kurs heute der i-ten Aktie bezeichnen wir mit x_i, den Kurs in einem Jahr mit X_i. Die Rendite ist $R_i = (X_i - x_i)/x_i$. Aus der Entwicklung der letzen Jahre wurden folgende Charakteristiken geschätzt. $\mathbb{E}[R_1] = 0.4$, $\mathbb{E}[R_2] = 0.6$, $\mathrm{Var}[R_1] = 0.25$, $\mathrm{Var}[R_2] = 1$, $\mathrm{Cov}[R_1, R_2] = 0.4$. Der Manager will nun eine möglichst sichere Investition wählen. Er investiert den a-ten Teil des Vermögens in Aktie 1, den $(1-a)$-ten Teil in Aktie 2. Somit hat er die Rendite $Y(a) = aR_1 + (1-a)R_2$. Er will nun $\mathrm{Var}[Y(a)]$ minimieren.

a) Berechnen Sie die Korrelation zwischen R_1 und R_2.

b) Wie muss a gewählt werden, wenn $a \in \mathbb{R}$. Das heisst, "kurze" Positionen ($a \notin [0,1]$) sind erlaubt. Wie gross wird dann die erwartete Rendite?

c) Wie muss a gewählt werden, falls nur "lange" Positionen erlaubt sind, das heisst $a \in [0,1]$?

d) Wie muss a gewählt werden, falls die erwartete Rendite $\mathbb{E}[Y(a)]$ mindestens 0.5 betragen soll?

6. Seien $\{X_k : 1 \leq k \leq n\}$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Dichte $f(x)$. Wir setzen $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ und $Z = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

a) Berechnen Sie $\mathbb{P}[Y \leq y, Z > z]$.

b) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von Y und Z.

c) Bestimmen Sie die bedingte Dichte und die bedingte Verteilung von Z gegeben $Y = y$.

d) Berechnen Sie (in Integralform) $\mathbb{E}[Z \mid Y = y]$.