Lösung der Nachklausur

1. a) Die Formel ergibt

$$\mathbb{P}[Y_1+Y_2=\ell]=\sum_{k=0}^{\ell}p^k(1-p)p^{\ell-k}(1-p)=(1-p)^2p^\ell\sum_{k=0}^{\ell}1=(\ell+1)p^\ell(1+p)^2\;.$$

b) Der Erwartungswert der geometrischen Verteilung ist $\mathbb{E}[Y_k]=p/(1-p)$, also ist $\mathbb{E}[X_k]=2p/(1-p)$. Für die Momentenmethode, schätzen wir den Parameter aus $2p/(1-p)=n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k$. Also,

$$\hat{p}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k}{2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k}=\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{2n+\sum_{k=1}^n X_k}\;.$$

c) Der Likelihood ist

$$L=\prod_{k=1}^n(x_k+1)p^{x_k}(1+p)^2=(1-p)^{2n}p^{\sum_{k=1}^n x_k}\prod_{k=1}^n(x_k+1)\;,$$

der Log-Likelihood

$$\ell=2n\log(1-p)+\log p\sum_{k=1}^n x_k+\sum_{k=1}^n\log(1+x_k)\;.$$

Aus der Ableitung finden wir die Gleichung

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{p}-\frac{2n}{1-p}=0\;.$$

Da die zweite Ableitung negativ ist, handelt es sich um ein Maximum. Wir erhalten

$$\hat{p}=\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{2n+\sum_{k=1}^n X_k}\;.$$

d) Die beiden Schätzer sind identisch.

2. **a)** Damit $L = n$, muss $V_k \geq V_1$ für $k = 2, \ldots, n$ und $V_{n+1} < V_1$ sein. Ist $2 \leq k \leq n$, so muss der k-te Lastwagen mindestens so schnell sein, wie der erste, da er sonst nicht in der Kolonne mitfahren würde. Der $(n+1)$-te Lastwagen muss langsamer sein, da er sonst in der Kolonne mitfahren würde. Also ist $L = n$ äquivalent mit $\min\{n \geq 2 : V_n < V_1\} = n + 1$.

b) Wir haben $L \geq n$, falls $V_1 \leq V_k$ für $2 \leq k \leq n$. Ordnen wir die Geschwindigkeiten der ersten n Lastwagen, so sind alle $n!$ Anordnungen gleich wahrscheinlich. Bei $(n-1)!$ dieser Anordnungen ist V_1 am kleinsten. Also ist $\mathbb{P}[L \geq n] = 1/n$. Alternativ kann man aus den ersten n Lastwagen den mit der kleinsten Geschwindigkeit ziehen. Da hat man n Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit den erste zu ziehen ist dann auch $1/n$. Also erhalten wir

$$\mathbb{P}[L = k] = \mathbb{P}[L \geq k] - \mathbb{P}[L \geq k+1] = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \,.$$

c) Wir haben für den Erwartungwert

$$\mathbb{E}[L] = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty \,.$$

3. **a)** Da die Irrfahrten unabhängig sind, gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\boldsymbol{S}_{2n} = (0,0,0)] &= \mathbb{P}[S^1_{2n} = 0, S^2_{2n} = 0, S^3_{2n} = 0] = \mathbb{P}[S^1_{2n} = 0]^3 \\ &= \frac{(2n!)^3}{(n!)^6} 2^{-6n} \,.\end{aligned}$$

Dies ist nach der Stirlingformel

$$\frac{[(2n)^{2n+1/2} \mathrm{e}^{-2n+\varepsilon_{2n}} \sqrt{2\pi}]^3}{[n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n+\varepsilon_n} \sqrt{2\pi}]^6} 2^{-6n} = (\pi n)^{-3/2} \mathrm{e}^{3\varepsilon_{2n} - 6\varepsilon_n} \,,$$

wobei ε_n nach 0 konvergiert. Daraus folgt die Behauptung.

b) Es gibt eine Zahl a, so dass $\mathbb{P}[\boldsymbol{S}_{2n} = (0,0,0)] \leq a n^{-3/2}$ für alle $n \geq 1$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[\boldsymbol{S}_{2n} = (0,0,0)] \leq a \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} < \infty \,.$$

Da $\mathbb{P}[\boldsymbol{S}_{2n+1} = (0,0,0)] = 0$, folgt aus dem Borel–Cantelli-Lemma, dass $\boldsymbol{S}_n = (0,0,0)$ nur endlich oft eintrifft.

4. **a)** Die bedingte Verteilung wird für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N = n \mid N \geq 1] &= \frac{\mathbb{P}[\{N = n\} \cap \{N \geq 1\}]}{\mathbb{P}[N \geq 1]} = \frac{\mathbb{P}[N = n]}{1 - \mathbb{P}[N = 0]} = \frac{\frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \\ &= \frac{\lambda^n}{n!(\mathrm{e}^{\lambda} - 1)} \,.\end{aligned}$$

b) Mit der Formel von Bayes erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[\text{Täter} \mid \text{DNA}] = \frac{\frac{1}{10}1}{\frac{1}{10}1 + \frac{9}{10}p} = \frac{1}{1+9p} = \frac{2\,000\,000}{2\,000\,009} = 1 - 4.49998 \cdot 10^{6} \,.$$

Es ist also eher unwahrscheinlich, dass der Verhaftete nicht der Täter ist.

c) Die Anzahl Männer N mit der übereinstimmenden DNA $\mathrm{Bin}(9\,000\,000, p)$ verteilt. Da p klein und n gross ist, können wir die Poisson Approximation verwenden, das heisst die $\mathrm{Pois}(\lambda)$ Verteilung mit $\lambda = 9\,000\,000/2\,000\,000 = 4.5$. Gibt es N Männer mit einer übereinstimmenden DNA, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Verhaftete der Täter ist $1/N$. Wir wissen aber, dass mindestens ein Mann (der Verhaftete) eine übereinstimmende DNA hat. Wir erhalten

$$\mathbb{P}[\text{Täter} \mid N \geq 1] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\lambda^n}{n!(\mathrm{e}^{\lambda} - 1)} = 0.290421 \,.$$

Der Verhaftete ist also nur zu etwa 29% der Täter.

5. a) Die Korrelation ist

$$\mathrm{Cor}[R_1, R_2] = \frac{\mathrm{Cov}[R_1, R_2]}{\sqrt{\mathrm{Var}[R_1]\,\mathrm{Var}[R_2]}} = \frac{0.4}{\sqrt{0.25 \cdot 1}} = 0.8\,.$$

b) Wir haben

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[Y(a)] &= a^2\,\mathrm{Var}[R_1] + (1-a)^2\,\mathrm{Var}[R_2] + 2a(1-a)\,\mathrm{Cov}[R_1, R_2] \\ &= a^2(\mathrm{Var}[R_1] + \mathrm{Var}[R_2] - 2\,\mathrm{Cov}[R_1, R_2]) \\ &\quad - 2a(\mathrm{Var}[R_2] - \mathrm{Cov}[R_1, R_2]) + \mathrm{Var}[R_2] \,.\end{aligned}$$

Da $\mathrm{Var}[R_1] + \mathrm{Var}[R_2] - 2\,\mathrm{Cov}[R_1, R_2] = \mathrm{Var}[R_1 - R_2] > 0$, ist die Funktion konvex in a. Wäre nämlich $\mathrm{Var}[R_1 - R_2] = 0$, so müsste $\mathrm{Cor}[R_1, R_2] = 1$ sein. Das Minimum wird für

$$a = \frac{\mathrm{Var}[R_2] - \mathrm{Cov}[R_1, R_2]}{\mathrm{Var}[R_1] + \mathrm{Var}[R_2] - 2\,\mathrm{Cov}[R_1, R_2]} = \frac{1 - 0.4}{0.25 + 1 - 2 \cdot 0.4} = \frac{4}{3}$$

angenommen. Durch die Korrelation kann man Verluste in der zweiten Aktie mit der ersten Aktie ausgleichen. Daher kauft man von der sichereren Aktie mehr als man sich leisten kann, und finanziert dies durch den Leerverkauf der zweiten Aktie.

c) Da die Varianz konvex in a ist, ist sie auf $(-\infty, 4/3)$ fallend. Also muss $a = 1$ gewählt werden. Man setzt somit alles auf die sicherere Aktie.

d) Die Rendite ist $\mathbb{E}[Y(a)] = a\mathbb{E}[R_1]+(1-a)\mathbb{E}[R_2] = \mathbb{E}[R_2]-a(\mathbb{E}[R_2]-\mathbb{E}[R_1])$. Soll die Rendite mindestens 0.5 betragen, muss

$$a \leq \frac{\mathbb{E}[R_2] - 0.5}{\mathbb{E}[R_2] - \mathbb{E}[R_1]} = \frac{0.6 - 0.5}{0.6 - 0.4} = \frac{1}{2}$$

gelten. Da die Varianz auf $(-\infty, 4/3)$ fallend ist, wählt man $a = \frac{1}{2}$.

6. **a)** Damit $Y \leq y$, müssen alle $X_k \leq y$ sein. Damit $Z > z$, müssen alle $X_k > z$ sein. Somit ist

$$\mathbb{P}[Y \leq y, Z > z] = \mathbb{P}[z < X_k \leq y \text{ für alle } k] = (F(y) - F(z))^n ,$$

sofern $y \geq z$.

b) Um die Dichtefunktionen zu erhalten, müssen wir ableiten. Also

$$\begin{aligned} f_{Y,Z}(y,z) &= -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}(F(y) - F(z))^n = -\frac{\partial}{\partial z} n(F(y) - F(z))^{n-1} f(y) \\ &= n(n-1)(F(y) - F(z))^{n-2} f(y) f(z) , \end{aligned}$$

wobei $y > z$.

c) Die Randverteilung von Y ist $F_Y(y) = (F(y))^n$, und damit die Randdichte $f_Y(y) = nf(y)(F(y))^{n-1}$. Wir erhalten für die bedingte Dichte

$$\begin{aligned} f_{Z|Y=y}(z) &= \frac{n(n-1)f(y)f(z)(F(y) - F(z))^{n-2}}{nf(y)F^{n-1}(y)} \\ &= (n-1)\frac{f(z)}{F(y)}\Big(1 - \frac{F(z)}{F(y)}\Big)^{n-2} . \end{aligned}$$

wobei $z < y$. Die bedingte Verteilung ist dann für $z \leq y$

$$\mathbb{P}[Z \leq z \mid Y = y] = 1 - \Big(1 - \frac{F(z)}{F(y)}\Big)^{n-1} .$$

Die Verteilung hätten wir auch so erhalten können. Ist $Y = y$, so gibt es ein k, so dass $Y_k = y$ und $X_\ell \leq y$ für $\ell \neq k$. Die Bedingte Verteilung von X_ℓ gegeben $X_\ell \leq Y$ ist $F(x)/F(y)$. Somit folgt die Verteilung aus a) mit $y = \infty$.

d) Wir erhalten

$$\mathbb{E}[Z \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{y} z(n-1)\frac{f(z)}{F(y)}\Big(1 - \frac{F(z)}{F(y)}\Big)^{n-2} \,\mathrm{d}z .$$

Mit partieller Integration können wir dies alternativ schreiben als (war nicht verlangt)

$$\mathbb{E}[Z \mid Y = y] = \int_0^{y^+} \Big(1 - \frac{F(z)}{F(y)}\Big)^{n-1} \,\mathrm{d}z - \int_{-\infty}^{-y^-} 1 - \Big(1 - \frac{F(z)}{F(y)}\Big)^{n-1} \,\mathrm{d}z .$$

Der letzte Ausdruck gilt auch im Fall, wo keine Dichte existiert.