Klausur 10.2.2009

1. Zwei Grossverteiler X und Y verkaufen Fahrräder. Beide haben je ein Qualitätsrad (Q) und ein Billigrad (B) im Angebot. Eine Konsumentenorganisation untersuchte die Qualität der Fahrräder. Die untenstehende Tabelle gibt an, wie gross der Anteil der Räder ist, bei denen während der Garantiezeit Mängel auftreten.

Eine mittelgrosse Firma offeriert ihren Mitarbeitern ein Rad billiger zu kaufen, indem eine Sammelbestellung organisiert wird. Die untenstehende Tabelle zeigt auch wieviele Räder bestellt wurden.

	Mangel Q	Mangel B	Bestellung Q	Bestellung B
Verteiler X	0.1	0.2	21	14
Verteiler Y	0.06	0.25	25	35

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem zufällig ausgewählten Rad Mängel auftreten?

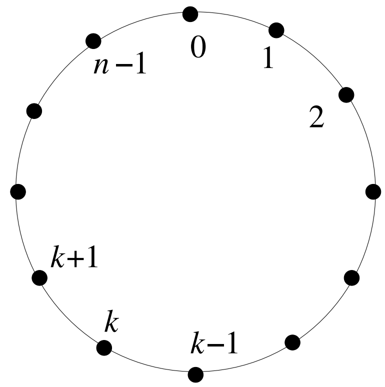
b) Ein Rad zeigt Mängel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um ein Billigrad handelt? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um ein Rad des Verteilers X (Q oder B) handelt?

c) Ein Qualitätsrad zeigt einen Mangel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um ein Rad des Verteilers X?

2. Ein Roboter erledigt Arbeiten an einem runden Tisch. Es gibt dabei n Arbeitspunkte $0, 1, \ldots, n-1$. Wenn der Roboter eine Arbeit erledigt hat, geht er mit gleicher Wahrscheinlichkeit zum nächsten Arbeitspunkt nach links oder nach rechts. Der Roboter startet im Punkt 0.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt $k+1$ vor dem Punkt $k-1$ besucht wird.
Hinweis: Übersetzen Sie dies in ein Ereignis für eine Irrfahrt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim ersten Besuch in k alle Punkte mindestens einmal besucht wurden ($k = 1, 2, \ldots, n-1$).
Hinweis: Berechnen Sie zuerst den Fall $k = 1$ oder $k = n-1$. Beachten Sie dann, dass Sie zuerst $k-1$ und $k+1$ erreichen müssen, bevor Sie k erreichen.



c) Wieviele Schritte muss der Roboter im Durchschnitt machen, bis er wieder nach 0 zurückkehrt?
Hinweis: Sei $e(k)$ die durchschnittliche Anzahl Schritte um 0 zu erreichen, wenn man in k startet. Die gesuchte Grösse ist dann $\frac{1}{2}(1+e(1))+\frac{1}{2}(1+e(n-1))$. Bestimmen Sie die Gleichungen für $e(k)$ und lösen Sie diese.

3. Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y ist gegeben durch die Dichte

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{2}{(1+x+y)^3}\mathbb{1}_{\{x>0,y>0\}}\ .$$

a) Berechnen Sie die Randverteilungen von X und Y.

b) Existieren die Erwartungswerte von X und Y? Falls ja, berechnen Sie diese.

c) Berechnen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben $\{Y=y_0\}$, wobei $y_0>0$.

d) Berechnen Sie die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X\mid Y=y_0]$.

4. Die Variablen $\{X_k : 1\le k\le n\}$ sind unabhängig mit Verteilungsfunktion

$$F(x)=[1-(1+x^2)^{-\beta}]\mathbb{1}_{x>0}\ , \qquad\qquad \beta>0\ .$$

a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_i^\alpha]$ für $\alpha>0$. Für welche α ist dieser Erwartungswert endlich?
Hinweis: Für $a<2b-1$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x^2)^b}\,\mathrm{d}x=\frac{\Gamma[\frac{1}{2}(a+1)]\Gamma[b-\frac{1}{2}(a+1)]}{2\Gamma[b]}\ .$$

Erinnern Sie sich, dass $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

Sei $\alpha_0=\sup\{\alpha:\mathbb{E}[X_i^\alpha]<\infty\}$.

b) Schätzen Sie β mit der Maximum-Likelihood-Methode aus den Variablen.

c) Geben Sie die Gleichung für β an, wenn Sie die Momentenmethode verwenden.

d) Sofern das zweite Moment existiert, könnte man die Momentenmethode auch mit dem zweiten Moment durchführen. Geben Sie den Schätzer für β an.

5. Ein Krankenhaus will sich eine neue Maschine zum Zählen von roten Blutkörperchen kaufen. Vor dem Kauf testet das Krankenhaus die neue Maschine. Eine Laborantin hat 35 Blutproben. Sie teilt die Proben in je zwei Teile, zählt die erste Teilprobe mit der alten Maschine, die zweite Teilprobe mit der neuen Maschine. Bezeichnen wir das erste Resultat mit X_i, das zweite Resultat mit Y_i. Die untenstehende Tabelle gibt eine Zusammenfassung der Resultate.

$\sum_{i=1}^{35} X_i$	$\sum_{i=1}^{35} Y_i$	$\sum_{i=1}^{35} X_i^2$	$\sum_{i=1}^{35} Y_i^2$	$\sum_{i=1}^{35} X_i Y_i$
3 609	3 654	377 181	389 388	382 531

a) Testen Sie auf dem 5%-Niveau, ob die beiden Maschinen im Mittel die selbe Anzahl Blutkörperchen zählen.

Da der Test nicht verwirft, nehmen wir nun an, dass beide Machinen im Mittel die gleiche Anzahl zählen.

b) Schätzen Sie den Mittelwert einer zufälligen Blutprobe. Nennen wir den Schätzer $\hat{\mu}$.

c) Um die Varianzen zu vergleichen, schlägt ein Mediziner vor, die Variablen $(X_i - \hat{\mu})^2$ und $(Y_i - \hat{\mu})^2$ zu betrachten. Er will dann einen Vorzeichentest anwenden, das heisst zählen, wie oft $(X_i - \hat{\mu})^2 > (Y_i - \hat{\mu})^2$. Ist dies ein sinnvolles Verfahren? Begründen Sie Ihre Meinung.

6. Für jede Zufallsvariable X definieren wir die Abbildung $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $r \mapsto (\mathbb{E}[\cos(rX)], \mathbb{E}[\sin(rX)])$. Wir benutzen die übliche Norm $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Zeigen Sie, $\|\varphi_X(r)\| \leq 1$.
Hinweis: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, ist $\varphi_X(r) = (1, a)$, so ist $a = 0$.

c) Zeigen Sie, ist $\mathbb{P}[X \in \mathbb{Z}] = 1$, so ist $\varphi_X(2\pi) = (1, 0)$.

d) Nehmen wir an, die Folge $\{X_n\}$ konvergiert in Verteilung gegen eine Variable X. Zeigen Sie, dass $\varphi_{X_n}(r)$ gegen $\varphi_X(r)$ konvergiert.