Lösung der Klausur

1. **a)** Es wurden insgesamt 95 Räder bestellt. Also sind die Wahrscheinlichkeiten, ein Rad aus einer bestimmten Gruppe zu wählen Anzahl Räder/95. Die unbedingte Wahrscheinlichkeit wird also

$$\frac{21}{95}0.1 + \frac{14}{95}0.2 + \frac{25}{95}0.06 + \frac{35}{95}0.25 = 0.159474\ .$$

b) Nach der Formel von Bayes ist die Wahrscheinlichkeit eines Billigrades

$$\frac{\frac{14}{95}0.2 + \frac{35}{95}0.25}{0.159474} = 0.762376\ .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um ein Rad des Verteilers X handelt ist

$$\frac{\frac{21}{95}0.1 + \frac{14}{95}0.2}{0.159474} = 0.323432\ .$$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Qualitätsrad vom Verteiler X stammt, ist 21/46. Also ergibt sich aus der Formel von Bayes

$$\frac{\frac{21}{46}0.1}{\frac{21}{46}0.1 + \frac{25}{46}0.06} = 0.583333\ .$$

2. **a)** Der Punkt $k+1$ entspricht dem Punkt $(k+1)-n = -(n-k-1)$ der Irrfahrt. Wir müssen also die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass ein Spieler mit Anfangskapital $n-k-1$ vor einem Spieler mit Anfangskapital $k-1$ ruiniert wird. Diese Wahrscheinlichkeit ist $(k-1)/(n-2)$.

b) Das Ereignis, die Punkte $1, 2, \ldots, n-2$ werden vor dem Punkt $n-1$ besucht, entspricht einer Irrfahrt, die den Wert $n-2$ vor dem Wert -1 erreicht. Das entspricht dem Ruinproblem, wo Spieler A Kapital 1 hat, Spieler B Kapital $n-2$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B zuerst ruiniert wird, ist somit $1/(n-1)$. Dies ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Die gleiche Wahrscheinlichkeit hat man aus Symmetriegründen für $k = 1$.

Damit k der letzte Punkt ist, der erstmals besucht wird, muss entweder $k+1$ vor $k-1$ besucht werden, und dann muss $k-1$ vor k besucht werden.

Oder $k-1$ muss vor $k+1$ besucht werden. Danach muss $k+1$ vor k besucht werden. $k+1$ vor $k-1$ zu besuchen, entspricht dem Ruinproblem mit Anfangskapitalien $n-(k+1)$ und $k-1$. Die Wahrscheinlichkeit ist $(k-1)/(n-2)$. Danach muss $k-1$ vor k besucht werden. Für die Irrfahrt ist $k+1$ der Anfangswert. Also müssen wir $n-2$ vor -1 zu besuchen. Die Wahrscheinlichkeit ist $1/(n-1)$. Somit erhalten wir für den beschriebenen Weg die Wahrscheinlichkeit $(k-1)/((n-1)(n-2))$. Analog folgt für die Wahrscheinlichkeit $k-1$ vor $k+1$, und danach $k+1$ vor k zu besuchen, $(n-(k+1))/(n-1)(n-2))$. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass k der letzte Punkt, der erstmals besucht wird,

$$\frac{k-1}{(n-1)(n-2)} + \frac{n-(k+1)}{(n-1)(n-2)} = \frac{n-2}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{n-1} \ .$$

c) Starten wir in k, so gehen wir mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu $k+1$ oder zu $k-1$. Die verbleibende mittlere Zeit nach dem ersten Schritt, um 0 zu erreichen ist dann $e(k+1)$ bzw. $e(k-1)$. Hier setzen wir $e(0)=e(n)=0$, da wir in diesem Falle 0 erreicht haben. Diese Überlegungen führen zu den Gleichungen

$$e(k) = \tfrac{1}{2}[(1+e(k+1)) + (1+e(k-1))] \ .$$

Dies können wir als

$$2e(k) - e(k+1) - e(k-1) = 2$$

schreiben. Zählen wir die Gleichungen von $k=1$ bis $k=n-1$ zusammen, erhalten wir

$$e(1) + e(n-1) = 2(n-1) \ .$$

Also ist die mittlere Rückkehrzeit $n-1$.

Alternativ schreiben wir

$$e(k+1) = 2e(k) - e(k-1) - 2 \ .$$

Da $e(0)=0$, haben wir $e(2) = 2e(1) - 2 = 2(e(1)-1)$. Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} e(3) &= 22(e(1)-1) - e(1) - 2 = 3e(1) - 6 = 3(e(1)-2) \ , \\ e(4) &= 23(e(1)-2) - 2(e(1)-1) - 2 = 4e(1) - 12 = 4(e(1)-3) \ , \\ e(5) &= 24(e(1)-3) - 3(e(1)-2) - 2 = 5e(1) - 20 = 5(e(1)-4) \ . \end{aligned}$$

Wir erraten daher $e(k) = k(e(1)-(k-1))$. In der Tat ist

$$\begin{aligned} 2[k(e(1)-(k-1))] - (k-1)[e(1)-(k-2)] - 2 &= (k+1)e(1) - k(k+1) \\ &= (k+1)(e(1)-k) \ . \end{aligned}$$

Setzen wir $0 = e(n) = ne(1) - n(n-1)$, erhalten wir $e(1) = n-1$, also $e(k) = k[(n-1)-(k-1)] = k(n-k)$. Insbesondere ist $e(1) = e(n-1) = n-1$. Der gesuchte Erwartungswert wird dann $n-1$.

3. **a)** Die Randdichte von X ist für $x > 0$

$$f_X(x) = \int_0^\infty \frac{2}{(1+x+y)^3}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{(1+x+y)^2}\bigg|_{y=0}^\infty = \frac{1}{(1+x)^2}\ .$$

Man könnte noch die Verteilungsfunktion berechnen. Für $x \geq 0$,

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+z)^2}\,\mathrm{d}z = 1 - \frac{1}{1+x}\ .$$

Die Randverteilung von Y ist die gleiche, da die Dichte symmetrisch in x und y ist.

b) Für den Erwartungswert erhalten wir

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\Big)\,\mathrm{d}x = \infty\ ,$$

da das erste Integral divergiert, und das zweite Integral die Dichte ist, also 1 ergibt. Natürlich ist auch $\mathbb{E}[Y] = \infty$.

c) Wir haben

$$\int_0^\infty \frac{2}{(1+x+y_0)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1+y_0)^2}\ ,$$

was wir schon in a) berechnet haben. Also ist die bedingte Dichte von X gegeben $\{Y = y_0\}$

$$f_{X|Y=y_0}(x) = \frac{\dfrac{2}{(1+x+y_0)^3}}{\dfrac{1}{(1+y_0)^2}} = \frac{2(1+y_0)^2}{(1+y_0+x)^3}\ .$$

Man könnte auch hier die Verteilungsfunktion berechnen,

$$\begin{aligned} F_{X|Y=y_0}(x) &= \int_0^x \frac{2(1+y_0)^2}{(1+y_0+z)^3} = (1+y_0)^2\Big(\frac{1}{(1+y_0)^2} - \frac{1}{(1+y_0+x)^2}\Big) \\ &= 1 - \frac{(1+y_0)^2}{(1+y_0+x)^2}\ . \end{aligned}$$

d) Den bedingten Erwartungswert erhalten wir aus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \mid Y = y_0] &= \int_0^\infty \frac{2x(1+y_0)^2}{(1+y_0+x)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \frac{2(1+y_0)^2}{(1+y_0+x)^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{2(1+y_0)^3}{(1+y_0+x)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= 2(1+y_0) - (1+y_0) = 1 + y_0\ . \end{aligned}$$

4. a) Die Dichte der Verteilung ist für $x > 0$

$$F'(x) = 2\beta x(1 + x^2)^{-\beta-1} \ .$$

Also erhalten wir für die gesuchten Momente

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i^\alpha] &= \int_0^\infty \frac{2\beta x^{\alpha+1}}{(1+x^2)^{\beta+1}} \, \mathrm{d}x = \frac{2\beta\Gamma(1+\alpha/2)\Gamma(\beta-\alpha/2)}{2\Gamma(\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha/2)\Gamma(\beta-\alpha/2)}{\Gamma(\beta)} \ .\end{aligned}$$

Das Integral ist endlich, falls der Exponent kleiner als -1 ist, also $\alpha + 1 - 2(\beta+1) < -1$, oder $\alpha < 2\beta$. Die gleiche Folgerung lässt sich aus dem Hinweis erhalten. Es gilt also $\alpha_0 = 2\beta$.

b) Der Log-Likelihood wird

$$L_\beta = n \log 2 + \sum_{i=1}^n \log X_i + n \log \beta - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \log(1 + X_i^2) \ .$$

Nullsetzen der Ableitung führt zu

$$\frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \log(1 + X_i^2) = 0 \ .$$

Da die zweite Ableitung $-n/\beta^2$ ist, handelt es sich wirklich um das Maximum. Somit wird der Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(1 + X_i^2)} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n \log(1 + X_i^2)} \ .$$

Da $\log(1 + X_i^2) > 0$, ist auch $\beta > 0$.

c) Damit das erste Moment existiert, müssen wir $\beta > \frac{1}{2}$ annehmen. Das erste Moment ist

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(\beta - \frac{1}{2})}{\Gamma(\beta)} \ .$$

Also müssen wir die Gleichung

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(\beta - \frac{1}{2})}{\Gamma(\beta)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta - \frac{1}{2})}{2\Gamma(\beta)}$$

lösen.

d) Das zweite Moment existiert, falls $\beta > 1$. Das zweite Moment wird

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \frac{\Gamma(2)\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(\beta-1)}{(\beta-1)\Gamma(\beta-1)} = \frac{1}{\beta-1} \; .$$

Der Momentenschätzer aus dem zweiten Moment wird also

$$\hat{\beta} = 1 + \frac{1}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \; .$$

5. a) Die Daten sind abhängig, da X_i und Y_i die selbe Probe analysieren. Ist der Mittelwert gleich, so hat die Differenz $X_i - Y_i$ den Mittelwert 0. Verschiedene Proben sind unabhängig. Wir wenden daher den t-Test auf eine Normalapproximation an. Der empirische Mittelwert ist

$$\hat{m} = \frac{1}{35}\sum_{i=1}^{35}(X_i - Y_i) = \frac{3609 - 3654}{35} = -\frac{9}{7} \; .$$

Die empirische Varianz wird

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{34}\sum_{i=1}^{35}\Big[(X_i - Y_i)^2 - \Big(\frac{9}{7}\Big)^2\Big] \\ &= \frac{377181 + 389388 - 2 \cdot 382531}{34} - \frac{35}{34}\,\frac{81}{49} = 42.6218 \; . \end{aligned}$$

Die t-Statistik wird dann

$$T = -\sqrt{35}\frac{9/7}{\sqrt{42.6218}} = -1.1651 \; .$$

T ist t-verteilt mit 34 Freiheitsgraden. Aus der Tabelle sehen wir, dass unter der Nullhypothese, der Mittelwert ist 0

$$\mathbb{P}[|T| \geq 2.032] = 0.05 \; .$$

Da hier $T < 2.032$, wird die Nullhypothese nicht verworfen.

b) Als Mittelwert könnte man den Mittelwert von $(X_i + Y_i)/2$ wählen, da wir von jeder Probe ja zwei Messungen haben

$$\hat{\mu} = \frac{1}{70}\sum_{i=1}(X_i + Y_i) = \frac{3609 + 3654}{70} = 103.757 \; .$$

Eine andere Möglichkeit wäre $3609/35 = 103.114$ oder $3654/35 = 104.4$. Diese Messungen haben aber unter der Annahme, dass die richtigen Mittelwerte gleich sind, eine höhere Varianz, da die Messfehler in der vorgeschlagenen Variante gemittelt werden.

c) Die Daten sind abhängig. Jede Probe hat einen korrekten Wert μ_i, der unbekannt ist. Die vorgeschlagennen Variablen sind

$$(X_i-\hat{\mu})^2 = \{(X_i-\mu_i)-(\hat{\mu}-\mu_i)\}^2 = (X_i-\mu_i)^2+(\hat{\mu}-\mu_i)^2-2(X_i-\mu_i)(\hat{\mu}-\mu_i)\ .$$

Der vorgeschlagende Test vergleicht also

$$(X_i-\mu_i)^2 - 2(X_i-\mu_i)(\hat{\mu}-\mu_i) \text{ und } (Y_i-\mu_i)^2 - 2(Y_i-\mu_i)(\hat{\mu}-\mu_i)\ .$$

Ist also $|\hat{\mu}-\mu_i|$ klein, so dominiert der erste Term, also wird die Variable mit der grösseren Varianz den grösseren Wert ergeben. Ist hingegen $\hat{\mu}-\mu_i$ gross (oder $\mu_i-\hat{\mu}$ gross), so entscheiden die Vorzeichen von $X_i-\mu_i$ und $Y_i-\mu_i$, welche der vorgeschlagenen Variablen grösser ist. Der Vorzeichentest kann also nicht die Varianzen vergleichen.

6. a) Es gilt

$$\begin{aligned}\|\varphi_X(r)\|^2 &= (\mathbb{E}[\cos(rX)])^2 + (\mathbb{E}[\sin(rX)])^2 \le \mathbb{E}[\cos^2(rX)] + \mathbb{E}[\sin^2(rX)] \\ &= \mathbb{E}[\cos^2(rX)+\sin^2(rX)] = 1\ .\end{aligned}$$

b) Wir haben $1+a^2 = \|\varphi_X(r)\|^2 \le 1$. Also muss $a^2 \le 0$ gelten, woraus $a=0$ folgt.

c) Ist $X \in \mathbb{Z}$, so ist $\cos(2\pi X) = 1$ (und $\sin(2\pi X) = 0$). Also ist $\mathbb{E}[\cos(2\pi X)] = 1$ (und $\mathbb{E}[\sin(2\pi X)] = 0$).

d) Die Funktionen $\cos(rx)$ und $\sin(rx)$ sind stetig und beschränkt. Somit folgt aus Hilfssatz 3.3, dass $\mathbb{E}[\cos(rX_n)] \to \mathbb{E}[\cos(rX)]$ und $\mathbb{E}[\sin(rX_n)] \to \mathbb{E}[\sin(rX)]$. Dies ist äquivalent zur Konvergenz von $\varphi_{X_n}(r)$ nach $\varphi_X(r)$.