Nachklausur 30.3.2009

1. In einem Land mit drei Hauptregionen findet eine Volksabstimmung statt. 60% der Stimmenden kamen aus der Region A, wovon 55% der Vorlage zugestimmt haben. Aus der Region B kamen 30% der Wähler, wovon 72% der Vorlage zugestimmt haben. Von den 10% der Wähler aus Region C haben nur 34% der Vorlage zugestimmt.

a) Wie gross ist der Anteil der Wähler des Landes, die der Vorlage zugestimmt haben?

b) Ein Wähler erklärt, dass er die Vorlage abgelehnt habe. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass der Wähler aus der Region A, B, bzw. C kommt?

c) Ein Wähler, der stolz darauf ist, nicht in der Region A zu wohnen, hat die Vorlage abgelehnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wohnt der Wähler in der Region B?

2. Wir betrachten eine klassische Irrfahrt $\{S_n\}$, d.h. $\mathbb{P}[X_i = 1] = \mathbb{P}[X_i = -1] = \frac{1}{2}$. Sei

$$T := \inf\{n \geq 2 : X_n = X_{n-1} = 1\}$$

der erste Zeitpunkt, an dem zwei Erfolge nacheinander auftreten. Ein Spieler hat folgendes Spielsystem: $V_1 = 1$, und für $n \geq 2$

$$V_n = 2 + X_{n-1} = \begin{cases} 3\,, & \text{falls } X_{n-1} = 1, \\ 1\,, & \text{falls } X_{n-1} = -1. \end{cases}$$

Er stoppt das Spiel zur Stoppzeit T.

a) Bestimmen Sie die möglichen Bilanzen S_2^V des Spielsystems zur Zeit $n = 2$.

b) Zeigen Sie (zum Beispiel mit Induktion), falls $\{T > n\}$, dann ist die Bilanz des Spiels zum Zeitpunkt n

$$S_n^V = 1 - n + X_n = \begin{cases} 2 - n\,, & \text{falls } X_n = 1, \\ -n\,, & \text{falls } X_n = -1. \end{cases}$$

c) Zeigen Sie, dass zur Stoppzeit T die Bilanz des Spiels $S_T^V = 6 - T$ ist.

d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[T > 2n] \le (3/4)^n$, und daher $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}[T > n] = 0$.

e) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[T]$.

3. Wir konstruieren den folgenden Prozess auf leicht komplizierte Art. Seien $\{I_n\}$ und $\{U_n\}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[I_n = 0] = 1 - \mathbb{P}[I_n = 1] = 1/(n+1)$. Die Variablen $\{U_n\}$ sind auf $(0,1)$ (stetig) gleichverteilt. Wir setzen $X_0 = 0$ und $K_n = (n+1)/\{n(X_{n-1}+2)\} - 1/n$. Wir definieren für $n \ge 1$,

$$X_n = I_n \mathbb{1}_{U_n > K_n}(X_{n-1}+1) = \begin{cases} X_{n-1}+1 & \text{falls } I_n = 1 \text{ und } U_n > K_n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass für $n \ge 1$

$$\mathbb{P}[X_n = 0 \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-2} = x_{n-2}, X_{n-1} = k] = \frac{1}{k+2}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_n = k+1 \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-2} = x_{n-2}, X_{n-1} = k] \\ = 1 - \mathbb{P}[X_n = 0 \mid X_{n-1} = k] = \frac{k+1}{k+2}\ .\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass der Zustand 0 unendlich oft besucht wird.

Wir können nun den Prozess $\{X_n\}$ in die Stücke zwischen den Besuchen in 0 unterteilen. Diese Stücke sind nach den obigen Wahrscheinlichkeiten (Sie brauchen dies nicht explizit nachzuweisen) unabhängig.

c) Zeigen Sie, dass jeder Zustand k unendlich oft besucht wird.

4. Die Daten $X_1, X_2, \ldots, X_n$ stammen von einer Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\pi a}}\, \mathrm{e}^{-(\log x - m)^2/a}\ ,$$

wobei $m \in \mathbb{R}$ und $a \in (0,\infty)$. Die ersten zwei Momente der Verteilung sind

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathrm{e}^{m+a/4}\ , \qquad \mathbb{E}[X_i^2] = \mathrm{e}^{2m+a}\ .$$

a) Schätzen Sie die Parameter a und m mit der Maximum-Likelihood-Methode.

b) Schätzen Sie die Parameter a und m mit der Momentenmethode aus den ersten zwei Momenten. Zeigen Sie insbesondere, dass der Schätzer für a positiv ist.

c) Nehmen wir an, a sei bekannt. Wie sehen die beiden Schätzer für m in diesem Falle aus?

5. Eine Statistikerin hat 78 Beobachtungen. Die Summe der Beobachtungen ist 161.866. Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Beobachtungen, die in den folgenden Intervallen liegen:

Intervall	$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 5)$	$(5, \infty)$
Anzahl	18	11	17	18	6	8

Sie vermutet, dass die Beobachtungen von einer Exponentialverteilung stammen.

a) Schätzen Sie den Parameter der Exponentialverteilung.

b) Testen Sie auf dem 5%-Niveau, ob die Vermutung der Exponentialverteilung mit dem geschätzten Parameter mit den Daten vereinbar ist.

6. Seien X und Y zwei unabhängige absolutstetige Zufallsvariablen mit den Dichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. Sei die Variable $Z = X/Y$.

a) Zeigen Sie, dass Z die Dichte

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_X(zy) f_Y(y) \, \mathrm{d}y$$

hat.

b) Berechnen Sie die Dichte von Z, wenn X und Y standardnormalverteilt sind.

c) Berechnen Sie die Dichte von Z, wenn X Gamma-verteilt mit Parameter γ und α, und Y Gamma-verteilt mit Parameter κ und β sind. Die Gamma-Verteilung hat die Dichte

$$f_X(x) = \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathbb{1}_{x>0} \, .$$