Lösung der Nachklausur

1. **a)** Aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt für den Anteil der Personen, die der Vorlage zugestimmt haben

$$0.6 \cdot 0.55 + 0.3 \cdot 0.72 + 0.1 \cdot 0.34 = 0.58\ .$$

Also liegt die Zustimmung bei 58%.

b) Es haben 42% die Vorlage abgelehnt. Nach der Formel von Bayes ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nein-Stimmer aus der Region A stammt

$$\frac{0.6 \cdot 0.45}{0.42} = 0.642857\ ,$$

aus der Region B

$$\frac{0.3 \cdot 0.28}{0.42} = 0.2\ ,$$

und aus der Region C

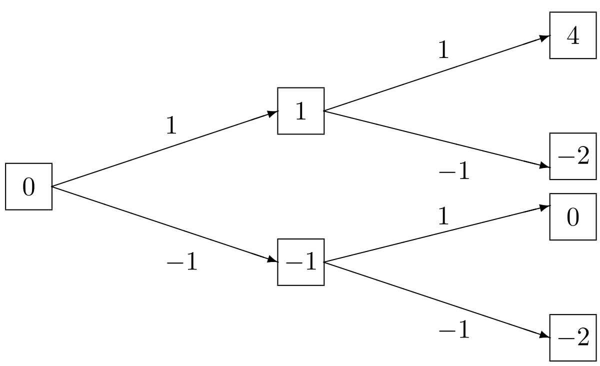
$$\frac{0.1 \cdot 0.66}{0.42} = 0.157143 = 1 - 0.642857 - 0.2\ .$$

c) Aus der Formel von Bayes erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nein-Stimmer, der nicht aus der Region A stammt, aus der Region B stammt

$$\frac{0.3 \cdot 0.28}{0.3 \cdot 0.28 + 0.1 \cdot 0.66} = 0.56\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, aus der Region B zu stammen ist also 56%.

2. **a)** Die möglichen Spielverläufe sind



Die möglichen Bilanzen sind also 4, falls $T = 2$, 0, falls $T > 2$ und $X_2 = 1$ und -2, falls $X_2 = -1$.

b) Ist $n = 2$, so ist die Bilanz nicht 4, da sonst $T = 2$. In den andern Fällen gilt die Formel. Sei nun $n > 2$. Nehmen wir an, $X_{n-1} = 1$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $S_{n-1}^V = 1 - (n-1) + 1 = 3 - n$. Dann muss $X_n = -1$ sein, da sonst $T = n$ und $V_n = 3$. Die Bilanz wird nun $S_n^V = 3 - n - 3 = -n$. Ist $X_{n-1} = 0$, so ist $S_{n-1}^V = 1 - (n-1) - 1 = 1 - n$. Also wird die Bilanz (da auf jeden Fall $T > n$ und $V_n = 1$) $S_n^V = 1 - n + X_n$, was die Aussage beweist.

c) Ist $T = n$, so ist $X_{n-1} = 1$ und damit $V_n = 3$. Also erhalten wir

$$S_n^V = S_{n-1}^V + 3 = 2 - (n-1) + 3 = 6 - n\ .$$

Dies ist die Aussage.

d) Die Ereignisse $A_n = \{X_{2n-1} = 1, X_{2n} = 1\}$ sind unabhängig und treten mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ ein. Tritt A_n ein, so ist $T \le 2n$. Also ist

$$\mathbb{P}[T > 2n] \le \mathbb{P}[\cap_{k \le n} A_k^c] = (3/4)^n\ .$$

Da $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}[T > n] \le \lim_{n\to\infty} n(3/4)^{\lfloor n/2 \rfloor} = 0$.

e) Nach dem Stoppsatz ist

$$0 = \mathbb{E}[S_{T\wedge m}^V] = \mathbb{E}[(6-T)\mathbb{1}_{T\le m}] + \mathbb{E}[(1 - m + X_m)\mathbb{1}_{T>m}]\ .$$

Da

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{m\to\infty} -m\mathbb{P}[T > m] &\le \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[(1 - m + X_m)\mathbb{1}_{T>m}] \\ &\le \lim_{m\to\infty} (2-m)\mathbb{P}[T > m] = 0\ , \end{aligned}$$

konvergiert der letzte Teil nach 0. Der erste Teil konvergiert nach $\mathbb{E}[6 - T]$. Also folgt $\mathbb{E}[T] = 6$.

3. a) Nach der Konstruktion sind nur die beiden Zustände 0 und $k+1$ möglich. Somit genügt es, die erste Gleichung zu beweisen. 0 wird erreicht, falls $I_n = 0$ oder $U_n \le K_n$. Diese beiden Ereignisse sind unabhängig. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[\{I_n = 0\} \cup \{U_n \le K_n\}] \\ &\qquad = \mathbb{P}[I_n = 0] + \mathbb{P}[U_n \le K_n] - \mathbb{P}[I_n = 0]\mathbb{P}[U_n \le K_n] \\ &\qquad = \frac{1}{n+1} + \Bigl(\frac{n+1}{n(k+2)} - \frac{1}{n}\Bigr) - \frac{1}{n+1}\Bigl(\frac{n+1}{n(k+2)} - \frac{1}{n}\Bigr) = \frac{1}{k+2}\ . \end{aligned}$$

Alternativ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\{I_n = 0\} \cup \{U_n \le K_n\}] &= \mathbb{P}[I_n = 0] + \mathbb{P}[I_n = 1]\mathbb{P}[U_n \le K_n] \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\Bigl(\frac{n+1}{n(k+2)} - \frac{1}{n}\Bigr) = \frac{1}{k+2}\ . \end{aligned}$$

b) Ist $I_n = 0$, so wird 0 besucht. Da die Ereignisse $\{I_n = 0\}$ unabhängig sind, und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[I_n = 0] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty\ ,$$

folgt aus dem Borel–Cantelli-Lemma, dass $\{I_n = 0\}$ unendlich oft eintritt. Damit wird auch 0 unendlich oft besucht.

c) Sei A_i das Ereignis, k wird zwischen dem i-ten Besuch in 0 und dem $i+1$-ten Besuch in Null besucht. Dann sind die A_i unabhängig und haben die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[X_1 = 1, X_2 = 2, \ldots, X_k = k] = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1} \;.$$

Da

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty \;,$$

folgt dass unendlich viele der A_i eintreffen. Somit wird k unendlich oft besucht.

4. a) Der Log-Likelihood ist

$$\log f(X_i) = -\log X_i - \tfrac{1}{2}(\log \pi + \log a) - \frac{1}{a}(\log X_i - m)^2 \;.$$

Wir müssen daher

$$-\sum_{i=1}^{n} \log X_i - \frac{n}{2}(\log \pi + \log a) - \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}(\log X_i - m)^2$$

maximieren. Leiten wir nach m ab und setzen die Ableitung 0, erhalten wir

$$\frac{2}{a}\sum_{i=1}^{n}(\log X_i - m) = 0 \;.$$

Die Lösung ist

$$\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i \;.$$

Da die Dichte am Rand verschwindet und stetig differenzierbar ist, muss es sich um ein Maximum handeln. Leiten wir nach a ab und setzen die Ableitung 0, erhalten wir

$$-\frac{n}{2a} + \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n}(\log X_i - \hat{m})^2 = 0 \;.$$

Die Lösung ist

$$\hat{a} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log X_i - \hat{m})^2 \;.$$

b) Wir haben

$$e^{2m} = \frac{\mathbb{E}[X_i]^4}{\mathbb{E}[X_i^2]} \;, \qquad e^{a/2} = \frac{\mathbb{E}[X_i^2]}{\mathbb{E}[X_i]^2} \;.$$

Wir finden daher die mit der Momentenmethode

$$\bar{m} = 2\log\Bigl(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Bigr) - \tfrac{1}{2}\log\Bigl(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\Bigr)$$

und

$$\bar{a} = 2\log\Bigl(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\Bigr) - 4\log\Bigl(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Bigr) \;.$$

Betrachten wir eine Verteilung, die den Werten $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je die Wahrscheinlichkeiten $1/n$ zuordnet, so ist $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ das zweite Moment und $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ das erste Moment. Daher gilt $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 > (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)^2$.

c) Da der Maximum-Likelihood-Schätzer nicht von a abhängt, ändert sich der ML-Schätzer nicht. Der Momentenschätzer erhält man aus dem ersten Moment

$$\bar{m} = \log\Bigl(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Bigr) - \frac{a}{4}\;.$$

5. **a)** Schätzen wir den Parameter mit der Maximum-Likelihood-Methode, müssen wir

$$\sum_{k=1}^{n}(\log\alpha - \alpha X_i) = n\log\alpha - \alpha\sum_{k=1}^{n} X_i$$

maximieren. Ableiten nach α gibt

$$\frac{n}{\alpha} - \sum_{k=1}^{n} X_i = 0\;,$$

oder den Schätzer

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} X_i}\;.$$

Die zweite Ableitung ist negativ, also handelt es sich wirklich ums Maximum. Oder, da die Likelihoodfunktion am Rand Null ist, muss es sich ums Maximum handeln.

Schätzen wir den Parameter mit der Momentenmethode, so erhalten wir den Parameter aus

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i\;.$$

Dies ergibt den gleichen Schätzer. In unserem Beispiel erhalten wir

$$\hat{\alpha} = \frac{78}{161.866} = 0.481880\;.$$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Beobachtung im gegebenen Intervall liegt, ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_i \in (0,\tfrac{1}{2})] &= 1 - \mathrm{e}^{-0.240940} = 1 - 0.785889 = 0.214111\;,\\
\mathbb{P}[X_i \in (\tfrac{1}{2},1)] &= \mathrm{e}^{-0.240940} - \mathrm{e}^{-0.481880} = 0.785889 - 0.617621 = 0.168268\;,\\
\mathbb{P}[X_i \in (1,2)] &= \mathrm{e}^{-0.481880} - \mathrm{e}^{-0.963760} = 0.617621 - 0.381456 = 0.236165\\
\mathbb{P}[X_i \in (2,3)] &= \mathrm{e}^{-0.963760} - \mathrm{e}^{-1.44564} = 0.381456 - 0.235595 = 0.145861\;,\\
\mathbb{P}[X_i \in (3,5)] &= \mathrm{e}^{-1.44564} - \mathrm{e}^{-2.40940} = 0.235595 - 0.089869 = 0.145726\\
\mathbb{P}[X_i > 5] &= \mathrm{e}^{-2.40940} = 0.089869\;.
\end{aligned}$$

Die erwarteten Häufigkeiten erhalten wir durch Multiplikation mit 78

Intervall	$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,5)$	$(5,\infty)$
$\bar{n}$	16.70	13.12	18.42	11.38	11.37	7.01

Die Teststatistik

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{k=1}^{6}\frac{(n_k - \bar{n}_k)^2}{\bar{n}_k}\\
&= \frac{(18-16.70)^2}{16.70} + \frac{(11-13.12)^2}{13.12} + \frac{(17-18.42)^2}{18.42} + \frac{(18-11.38)^2}{11.38}\\
&\quad + \frac{(6-11.37)^2}{11.37} + \frac{(8-7.01)^2}{7.01} = 7.08027
\end{aligned}$$

ist annähernd χ^2-verteilt mit 5 Freiheitsgraden. Aus der Tabelle finden wir das 5%-Quantil $11.070 > 7.08027$. Das heisst, die Hypothese wird beibehalten. Die Exponentialverteilung ist also mit den Daten vereinbar.

6. **a)** Wir haben

$$\mathbb{P}[X/Y \le z] = \int_0^\infty \mathbb{P}[X \le zy] f_Y(y)\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}[X \ge zy] f_Y(y)\,\mathrm{d}y\;.$$

Leiten wir nach z ab, erhalten wir die Dichte

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^\infty y f_X(zy) f_Y(y)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^0 y f_X(zy) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^\infty |y| f_X(zy) f_Y(y)\,\mathrm{d}y\;. \end{aligned}$$

b) Für die Normalverteilung erhalten wir aus der obigen Formel

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |y| \mathrm{e}^{-(zy)^2/2}\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-(1+z^2)y^2/2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi(1+z^2)}\int_0^\infty (1+z^2) y\mathrm{e}^{-(1+z^2)y^2/2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi(1+z^2)}\;. \end{aligned}$$

Diese Verteilung heisst Cauchy-Verteilung.

c) Für die Gamma-Verteilungen erhalten wir aus der obigen Formel

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{\alpha^\gamma \beta^\kappa}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\kappa)}\int_0^\infty y(zy)^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-\alpha z y} y^{\kappa-1}\mathrm{e}^{-\beta y}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\alpha^\gamma \beta^\kappa z^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\kappa)}\int_0^\infty y^{\gamma+\kappa-1}\mathrm{e}^{-(\alpha z+\beta)y}\,\mathrm{d}y = \frac{\alpha^\gamma \beta^\kappa z^{\gamma-1}\Gamma(\gamma+\kappa)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\kappa)(\alpha z+\beta)^{\gamma+\kappa}} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+\kappa)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\kappa)}\frac{(\beta/\alpha)^\kappa z^{\gamma-1}}{(z+\beta/\alpha)^{\gamma+\kappa}}\;. \end{aligned}$$