Klausur 27.2.2012

1. In zwei Urnen befinden sich je vier faire Würfel in den Farben: Rot, Blau, Grün, Gelb. Aus jeder Urne wird ein Würfel gezogen und damit gewürfelt.

a) Geben Sie den Raum der Elementarereignisse Ω und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Sechsen geworfen wurden, wenn

b) man keine weiteren Angaben hat.

c) wenn man weiss, dass (mindestens) eine Sechs geworfen wurde.

d) wenn man weiss, dass (mindestens) eine Sechs mit einem roten Würfel geworfen wurde.

2. Die Variablen $\{X_n\}$ seien unabhängig mit

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \mathbb{P}[X_n = -1] = \mathbb{P}[X_n = 0] = \tfrac{1}{3} \; .$$

Wir setzen $S_n = \sum_{k=1}^n X_n$. Für $a > 0$, sei $T_a = \inf\{k : S_k = a\}$ die Zeit des ersten Besuches in a.

a) Sei K die Anzahl der 1-en, L die Anzahl der -1-en in $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[K = k, L = \ell]$, falls $k + \ell \leq n$.

b) Berechnen Sie die Verteilung von S_n.

c) Drücken Sie $\mathbb{P}[T_a \leq n]$ mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten der Form $\mathbb{P}[S_n = b]$ aus.

Sie brauchen die erhaltenen Formeln nicht zu vereinfachen.

3. Die Variablen X_n seien exponential mit Parameter 1 verteilt und unabhängig.

a) Sei $A_n = \{X_n > \alpha \ln n\}$. Zeigen Sie, dass unendliche viele A_n eintreten, falls $\alpha \leq 1$ und nur endlich viele A_n eintreten, falls $\alpha > 1$.

b) Berechnen Sie $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n / \ln n$.

c) Berechnen Sie $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n/\ln n$.
Hinweis: Wie oft tritt $\{X_n \le 2\}$ ein?

4. Seien X, Y zwei Zufallsvariablen mit auf $(0,1)$ gleichverteilten Randverteilungen, d.h., $\mathbb{P}[X \le x] = \mathbb{P}[Y \le x] = x$ für $x \in (0,1)$. Die gemeinsame Verteilung von (X,Y) sei $F(x,y)$.

a) Zeigen Sie, dass $F(x,y) \le \min\{x,y\}$.

b) Zeigen Sie, dass $F(x,y) \ge \max\{x+y-1, 0\}$.

c) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von Y gegeben $\{X = x\}$, falls $F(x,y) = \min\{x,y\}$.

d) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von Y gegeben $\{X = x\}$, falls $F(x,y) = \max\{x+y-1, 0\}$.

Hinweis: Für die bedingten Verteilungen bedingen Sie auf $X \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, und lassen Sie ε nach 0 gehen.

5. Seien $\{X_1, \dots, X_n\}$ unabhängige auf $(0,\theta)$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Wir setzen $M_n = \max_{1\le k\le n} X_k$.

a) Zeigen Sie, dass M_n der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ ist.

b) Bestimmen Sie c_n, so dass $c_n M_n$ erwartungstreu wird.

c) Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall der Form $[M_n, k_n(\alpha)M_n]$ für θ zum Niveau α.

6. Gegeben ist die Stichprobe:

X_i:	35	43	37	31	41	45	38	47
Y_i:	39	42	32	36	33			

Man nimmt an, dass alle Daten unabhängig sind, dass die X_i die stetige Verteilung F haben und die Y_i die Verteilung G. F und G sind nicht bekannt. Testen Sie auf dem 5% Niveau die Hypothese $F = G$.

Quantile der Normalverteilung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q(\mathrm{P})}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{100}\ .$$

P	q(P)	P	q(P)	P	q(P)	P	q(P)	P	q(P)	P	q(P)
50	0.0000	5.0	1.6449	3.0	1.8808	2.0	2.0537	1.0	2.3263	0.10	3.0902
45	0.1217	4.8	1.6646	2.9	1.8957	1.9	2.0749	0.9	2.3656	0.09	3.1214
40	0.2533	4.6	1.6849	2.8	1.9110	1.8	2.0969	0.8	2.4089	0.08	3.1559
35	0.3853	4.4	1.7060	2.7	1.9268	1.7	2.1201	0.7	2.4573	0.07	3.1947
30	0.5244	4.2	1.7279	2.6	1.9431	1.6	2.1444	0.6	2.5121	0.06	3.2389
25	0.6745	4.0	1.7507	2.5	1.9600	1.5	2.1701	0.5	2.5758	0.05	3.2905
20	0.8416	3.8	1.7744	2.4	1.9774	1.4	2.1973	0.4	2.6521	0.01	3.7190
15	1.0364	3.6	1.7991	2.3	1.9954	1.3	2.2262	0.3	2.7478	0.005	3.8906
10	1.2816	3.4	1.8250	2.2	2.0141	1.2	2.2571	0.2	2.8782	0.001	4.2649
5	1.6449	3.2	1.8522	2.1	2.0335	1.1	2.2904	0.1	3.0902	0.0005	4.4172