Lösung der Klausur

1. a) Man aus jeder Urne kann vier verschiedene Farben ziehen, und mit jeder Farbe 6 Zahlen würfeln. Wir haben somit die Elementarereignisse

$$\Omega = \{(f_1, x_1, f_2, x_2) : f_i \in \{1,2,3,4\}, x_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \ .$$

Die Farbe und die Zahl sind unabhängig. Somit ist die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses

$$p(\omega) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{576} \ .$$

b) Die Farben spielen hier keine Rolle. Somit ist die Wahrscheinlichkeit für zwei Sechsen $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

c) Die Farben spielen hier keine Rolle. Die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Sechs ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[6 \in \{X_1, X_2\}] &= \mathbb{P}[X_1 = 6] + \mathbb{P}[X_2 = 6] - \mathbb{P}[X_1 = X_2 = 6] \\ &= \frac{2}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} \ . \end{aligned}$$

Somit ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für zwei Sechsen, wenn mindestens eine Sechs gewürfelt wurde

$$\mathbb{P}[X_1 = X_2 = 6 \mid 6 \in \{X_1, X_2\}] = \frac{\mathbb{P}[X_1 = X_2 = 6]}{\mathbb{P}[6 \in \{X_1, X_2\}]} = \frac{1/36}{11/36} = \frac{1}{11} \ .$$

d) Hier spielen die Farben eine Rolle. Wir erhalten (Rot=1)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(1,6) \in \{(F_1, X_1), (F_2, X_2)] &= \mathbb{P}[F_1 = 1, X_1 = 6] + \mathbb{P}[F_2 = 1, X_2 = 6] \\ &\quad - \mathbb{P}[F_1 = F_2 = 1, X_1 = X_2 = 6] \\ &= \frac{2}{24} - \frac{1}{576} = \frac{47}{576} \ . \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für zwei Sechsen, wovon eine mit einem roten Würfel, wird

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[1 \in \{F_1, F_2\}, X_1 = X_2 = 6] \\ &\qquad = 2\mathbb{P}[F_1 = 1, X_1 = X_2 = 6] - \mathbb{P}[F_1 = F_2 = 1, X_1 = X_2 = 6] \\ &\qquad = \frac{2}{4 \cdot 6 \cdot 6} - \frac{1}{576} = \frac{7}{576} \ . \end{aligned}$$

Somit wird die begingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[X_1 = X_2 = 6 \mid 1 \in \{F_1, F_2\}, X_1 = X_2 = 6] = \frac{7/576}{47/576} = \frac{7}{47} \; .$$

Die Farbe des Würfels ist somit eine wirkliche Information.

2. **a)** Die k 1-en können wir auf $\binom{n}{k}$ Arten auf die n Plätze verteilen, die ℓ -1-en auf $\binom{n-k}{\ell}$ Arten auf die restlichen $n-k$ Plätze. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[K = k, L = \ell] = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}(\tfrac{1}{3})^n = \frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!}3^{-n} \; .$$

b) Wir haben dann $S_n = K - L$. Damit $S_n = b$ gilt, muss $K - L = b$ sein. Insbesondere ist $K + L \geq |b|$. Wegen der Symmetrie spielt es keine Rolle, ob mehr 1 oder -1 vorkommen. Wir erhalten daher

$$\mathbb{P}[S_n = b] = \sum_{k=|b|}^{(n+|b|)/2} \frac{n!}{k!(k-|b|)!(n-2k+|b|)!}3^{-n} \; .$$

c) Wir spiegeln den Pfad ab dem Zeitpunkt, wo $a \leq n$ erreicht wird. Sei $c > 0$. Endet der ursprüngliche Pfad in $a-c$, so endet der gespiegelte Pfad in $a+c$. Da $+1$ und -1 die selben Wahrscheinlichkeiten haben, haben der Pfad und der gespiegelte Pfad die gleichen Wahrscheinlichkeiten. Da aber ein Pfad, der in $a+c$ endet auch a erreichen muss, erhalten wir

$$\mathbb{P}[T_a < n, S_n = a - c] = \mathbb{P}[S_n = a + c] \; .$$

Wir haben dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T_a \leq n] &= \sum_{b=2a-n}^{n} \mathbb{P}[T_a \leq n, S_n = b] \\
&= \sum_{b=2a-n}^{a-1} \mathbb{P}[T_a \leq n, S_n = b] + \sum_{b=a}^{n} \mathbb{P}[T_a \leq n, S_n = b] \\
&= \sum_{b=2a-n}^{a-1} \mathbb{P}[S_n = 2a - b] + \sum_{b=a}^{n} \mathbb{P}[S_n = b] \\
&= \mathbb{P}[S_n \notin [-a, a-1]] \; .
\end{aligned}$$

3. **a)** Die Ereignisse A_n sind unabhängig. Wir haben

$$\mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}[X_n > \alpha \ln n] = \mathrm{e}^{-\alpha \ln n} = n^{-\alpha} .$$

Damit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha \leq 1, \\ < \infty & \text{falls } \alpha > 1. \end{cases} .$$

Somit treten unendlich viele A_n ein, falls $\alpha \leq 1$ und endlich viele, falls $\alpha > 1$.

b) Da $X_n / \ln n \geq 1$ für unendlich viele n, muss $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n / \ln n \geq 1$ gelten. Ist $\alpha > 1$, gilt $X_n / \ln n > \alpha$ nur endlich oft, also $X_n / \ln n \leq \alpha$ für n gross genug. Somit muss $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n / \ln n \leq \alpha$ gelten. Da $\alpha > 1$ beliebig ist, gilt $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n / \ln n \leq 1$. Damit ist $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n / \ln n = 1$.

c) Da $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X_n \leq 2] = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \mathrm{e}^{-2}) = \infty$, sind unendlich viele X_n kleiner als Zwei. Dies folgt auch aus dem starken Gesetz der grossen Zahl, da $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{E}[X_k] = 1$. Insbesondere gibt es unendlich viele n, für die $X_n / \ln n \leq 2 / \ln n$. Da letzterer Ausdruck nach 0 konvergiert, muss $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n / \ln n = 0$ gelten.

4. **a)** Es gilt $\mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] \leq \mathbb{P}[X \leq x] = x$ und $\mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] \leq \mathbb{P}[Y \leq y] = y$. Somit ist $F(x, y) \leq \min\{x, y\}$.

b) Wir haben

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] \\ &\qquad = \mathbb{P}[X \leq x] + \mathbb{P}[Y \leq y] - \{\mathbb{P}[X \leq x] + \mathbb{P}[X > x, Y \leq y]\} . \end{aligned}$$

Die Erreignisse $\{X \leq x\}$ und $X > x, Y \leq y\}$ sind disjunkt, also ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten durch 1 beschränkt. Somit erhalten wir $F(x, y) \geq x + y - 1$. Dass $F(x, y) \geq 0$ folgt aus der Definition des Wahrscheinlichkeitsmasses.

c) Nehmen wir $x \in (0, 1)$ und $\varepsilon \leq \min\{x, 1 - x\}$ an. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y \leq y \mid X \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)] &= \frac{\mathbb{P}[Y \leq y, X \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)]}{2\varepsilon} \\ &= \frac{\min\{x + \varepsilon, y\} - \min\{x - \varepsilon, y\}}{2\varepsilon} = \begin{cases} 0 & \text{falls } y \leq x - \varepsilon, \\ \frac{y - (x - \varepsilon)}{2\varepsilon} & \text{falls } x - \varepsilon < y < x + \varepsilon, \\ 1 & \text{falls } y \geq x + \varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Lassen wir $\varepsilon \to 0$, so erhalten wir den Grenzwert

$$\mathbb{P}[Y \leq y \mid X = x] = \begin{cases} 0 & \text{falls } y < x, \\ 1 & \text{falls } y \geq x. \end{cases}$$

(Für $y = x$ ist der Grenzwert $\frac{1}{2}$, was in der Grenzverteilung wegen der Rechtsstetigkeit 1 sein muss). In der gemeinsamen Verteilung ist somit $Y = X$.

d) Nehmen wir $x \in (0,1)$ und $\varepsilon \le \min\{x, 1-x\}$ an. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y \le y \mid X \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)] &= \frac{\mathbb{P}[Y \le y, X \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)]}{2\varepsilon} \\
&= \frac{\max\{x+\varepsilon+y-1, 0\} - \max\{x-\varepsilon+y-1, 0\}}{2\varepsilon} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } y \le 1-x-\varepsilon, \\ \frac{x+\varepsilon+y-1)}{2\varepsilon} & \text{falls } 1-x-\varepsilon < y < 1-x+\varepsilon, \\ 1 & \text{falls } y \ge 1-x+\varepsilon. \end{cases}
\end{aligned}$$

Lassen wir $\varepsilon \to 0$, so erhalten wir den Grenzwert

$$\mathbb{P}[Y \le y \mid X = x] = \begin{cases} 0 & \text{falls } y < 1-x, \\ 1 & \text{falls } y \ge 1-x. \end{cases}$$

(Für $y = 1-x$ ist der Grenzwert $\frac{1}{2}$, was in der Grenzverteilung wegen der Rechtsstetigkeit 1 sein muss). In der gemeinsamen Verteilung ist somit $Y = 1-X$.

5. a) Der Likelihood ist $\prod_{k=1}^n \theta^{-1} \mathbb{1}_{x_k \le \theta} = \theta^{-n} \mathbb{1}_{\max\{x_k\} \le \theta}$. Also muss $\hat{\theta} \ge M_n$ gelten. Der Likelihood ist fallend in θ, also muss θ so klein wie möglich gewählt werden. Dies zeigt, dass M_n der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ ist.

b) Die Verteilungsfunktion von M_n ist

$$\mathbb{P}_\theta[M_n \le x] = \mathbb{P}_\theta[X_1 \le x, X_2 \le x, \cdots, X_n \le x] = \theta^{-n} x^n \ .$$

Der Erwartungswert von M_n ist dann

$$\mathbb{E}_\theta[M_n] = \int_0^\theta x n \theta^{-n} x^{n-1} \, \mathrm{d}x = n\theta^{-n} \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta \ .$$

Um einen erwartungstreuen Schätzer zu erhalten, müssen wir $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} M_n$ wählen.

c) Es ist klar, dass $\mathbb{P}_\theta[M_n \le \theta] = 1$. Also müssen wir $k_n(\alpha)$ so bestimmen, dass $\mathbb{P}_\theta[\theta \le k_n(\alpha) M_n] \ge 1-\alpha$. Also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta[\theta \le k_n(\alpha) M_n] = \mathbb{P}_\theta[M_n \ge \theta / k_n(\alpha)] &= 1 - \Big(\frac{\theta/k_n(\alpha)}{\theta}\Big)^n \\
&= 1 - k_n^{-n}(\alpha) \ge 1 - \alpha \ .
\end{aligned}$$

Das heisst, $k_n(\alpha) \ge \alpha^{-1/n}$. Das Konfidenzintervall wird also $[M_n, \alpha^{-1/n} M_n]$.

6. Wir wollen den Wilcoxon-Test anwenden. Ordnen wir die Daten, erhalten wir

X_4	Y_3	Y_5	X_1	Y_4	X_3	X_7	Y_1	X_5	Y_2	X_2	X_6	X_8
31	32	33	35	36	37	38	39	41	42	43	45	47
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Die Rangsumme der Y ist 28, und damit die Rangsumme der X $\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14-28 = 63$. Die Statistik für den Wilcoxon-Test ist somit $28 - \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6 = 13$. Der Mittelwert unter der Hypothese ist $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5 = 20$, die Varianz $\frac{1}{12}\cdot 8\cdot 5\cdot 14 = \frac{140}{3}$. Die normierte Abweichung vom Mittelwert ist also

$$\frac{13-20}{\sqrt{140/3}} = -1.0247 \; .$$

Dieser Wert liegt im Intervall $(-1.96, 1.96)$. Somit wird die Hypthese beibehalten. Der Wert liegt auch im Intervall $(-1.64, 1.64)$. Daher würde die Hypothese auch auf dem 10% Niveau beibehalten.

Die exakte Wahrscheinlichkeit, dass die Statistik einen Wert annimmt, der mindestens so stark vom Mittelwert abweicht, ist

$$\mathbb{P}[|U-20| \geq 7] = \frac{456}{1287} = 0.354312 \; .$$

Wir könnten also auch auf dem Niveau $\alpha = 0.35$ die Hypothese nicht verwerfen. Dies liegt vor allem daran, dass wir nur wenige Daten haben.