Nachklausur 23.3.2012

1. Jemand hat drei Würfel, die in einer Urne liegen. Zwei dieser Würfel sind gezinkt, der dritte ist fair. Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten, der beiden gezinkten Würfel:

W'keit	1	2	3	4	5	6
Würfel 1	0.06	0.16	0.16	0.16	0.16	0.30
Würfel 2	0.08	0.08	0.17	0.17	0.24	0.26

Ein Würfel wird blind gezogen und geworfen. Das Resultat ist 5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

a) Würfel 1 gezogen wurde.

b) Würfel 2 gezogen wurde.

c) der faire Würfel gezogen wurde.

2. Eine Spielerin spielt ein faires Spiel, wobei sie in jeder Runde eine Einheit gewinnt oder eine Einheit verliert. Sie hat folgende Strategie: Sie spielt solange, bis sie dreimal hintereinander gewinnt.

a) Sei T die Anzahl Runden, die die Spielerin spielt. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$\mathbb{E}[T] = \tfrac{1}{8} \cdot 3 + \tfrac{1}{8}(\mathbb{E}[T] + 3) + \tfrac{1}{4}(\mathbb{E}[T] + 2) + \tfrac{1}{2}(\mathbb{E}[T] + 1)\ .$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}[T]$.

b) Wie hoch ist der mittlere Gewinn bei dieser Strategie?

c) Wie hoch ist die Varianz des Gewinnes S_T?
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[S_T^2 \mathbb{1}_{T>N}] = 0$ und $\mathbb{P}[T < \infty] = 1$.

3. Die Variable X ist normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz σ^2. Gegeben X, so ist die Variable Y bedingt normalverteilt mit Mittelwert X und Varianz η^2.

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von (X, Y), d.h. die Dichte von (X, Y).

b) Sie beobachten $\{Y = y\}$. Wie sieht die bedingte Verteilung von X gegeben $\{Y = y\}$ aus?

c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X \mid Y]$.

4. Die Variablen $\{X_k\}$ seien exponentialverteilt mit Parameter α und N sei Poisson-verteilt mit Parameter λ. Alle Variablen seien unabhängig. Wir interessieren uns für die Summe $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$, wobei $\sum_{k=1}^{0} X_k = 0$.

a) Berechnen Sie die momentenerzeugende Funktion der Variablen X_k.

b) Zeigen Sie, dass

$$M_S(r) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rS}] = \exp\Bigl\{\frac{\lambda r}{\alpha - r}\Bigr\}$$

für $r < \alpha$.

c) Zeigen Sie, dass für alle $c \geq \lambda/\alpha$

$$\mathbb{P}[S \geq c] \leq \exp\{-(\sqrt{\alpha c} - \sqrt{\lambda})^2\} \,.$$

5. Die folgenden Zahlen geben die Anzahl der in Deutschland gestohlenen PKW:

Jahr	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
	104 890	89 072	76 266	65 861	58 646	48 742	42 560

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
37 549	34 775	31 707	28 674	23 771	18 965	16 502	16 134

Ein Statistiker macht das folgende Modell. Die Beobachtung ist von der Form

$$f(x) = 104\,890 \exp\{-a(x - 1994) + \varepsilon(x)\} \,,$$

wobei $\varepsilon(x)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[\varepsilon(x)] = 0$ sind. $f(x)$ bezeichnet die im Jahr $x \geq 1995$ gestohlenen Wagen. Schätzen Sie den Parameter a geeignet und machen Sie eine auf Ihrer Schätzung basierende Vorhersage für die Anzahl der PKW, die 2012 gestohlen werden.

6. Gegeben sei eine Stichprobe vom Umfang n. Gegeben sei die Hypothese, die Daten seien normalverteilt mit Mittelwert 25 und Varianz 4 und die Alternative, die Daten seien normalverteilt mit Mittelwert 26 und Varianz 4.

a) Konstruieren Sie den optimalen Test zum Niveau $\alpha = 2.5\%$.

b) Wie gross muss man n wählen, so dass der Fehler zweiter Art das Niveau 5% einhält (gesucht ist das minimale n).

Quantile der Normalverteilung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q(\mathrm{P})}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{100} \, .$$

P	q(P)	P	q(P)	P	q(P)	P	q(P)	P	q(P)	P	q(P)
50	0.0000	5.0	1.6449	3.0	1.8808	2.0	2.0537	1.0	2.3263	0.10	3.0902
45	0.1217	4.8	1.6646	2.9	1.8957	1.9	2.0749	0.9	2.3656	0.09	3.1214
40	0.2533	4.6	1.6849	2.8	1.9110	1.8	2.0969	0.8	2.4089	0.08	3.1559
35	0.3853	4.4	1.7060	2.7	1.9268	1.7	2.1201	0.7	2.4573	0.07	3.1947
30	0.5244	4.2	1.7279	2.6	1.9431	1.6	2.1444	0.6	2.5121	0.06	3.2389
25	0.6745	4.0	1.7507	2.5	1.9600	1.5	2.1701	0.5	2.5758	0.05	3.2905
20	0.8416	3.8	1.7744	2.4	1.9774	1.4	2.1973	0.4	2.6521	0.01	3.7190
15	1.0364	3.6	1.7991	2.3	1.9954	1.3	2.2262	0.3	2.7478	0.005	3.8906
10	1.2816	3.4	1.8250	2.2	2.0141	1.2	2.2571	0.2	2.8782	0.001	4.2649
5	1.6449	3.2	1.8522	2.1	2.0335	1.1	2.2904	0.1	3.0902	0.0005	4.4172