

Klausur 19.2.2014

1. In einem Medikamententest wird an kranke Patienten je eine Packung Tabletten abgegeben. 50% der Patienten erhalten Medikament A, 40% Medikament B und 10% Medikament C. Die Patienten wissen nicht, welches Medikament sie erhalten. Hersteller A behauptet, dass 90% der Patienten, die sein Medikament einnehmen innerhalb einer Woche gesund werden. Hersteller B behauptet, dass 95% der Patienten mit seinem Medikament innerhalb einer Woche gesund werden. Hersteller C behauptet, dass 97% der Patienten mit seinem Medikament innerhalb einer Woche gesund werden. Wir nehmen nun an, dass alle diese Behauptungen richtig seien. Ein Patient kommt nach einer Woche zu einem Arzt in die Praxis und ist immer noch krank.
 - a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient Medikament A, B, bzw. C erhalten hat?
 - b) Der Arzt kann zweifelsfrei feststellen, dass der Patient *nicht* Medikament A erhalten hat. Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient Medikament B bzw. C eingenommen hat?
 - c) Die Ehefrau des (immer noch kranken) Patienten hat ein Medikament des selben Herstellers B oder C wie ihr Mann eingenommen, wurde aber gesund. Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit für Medikament B bzw. C, wenn wir annehmen, dass der Genesungserfolg der beiden Eheleute unabhängig voneinander ist?
2. Zwei Spieler A und B zahlen den Einsatz a beziehungsweise b . Danach werfen sie abwechselungsweise einen Würfel, wobei Spieler A beginnt. Der erste, der eine Sechs wirft, gewinnt den Einsatz $a + b$.
 - a) Wie gross ist der mittlere Gewinn für Spieler A und für Spieler B?
 - b) Wie gross muss a und b sein, damit das Spiel fair ist, wenn $a + b = 11\text{€}$?
 - c) Nachdem A vier Mal und B drei Mal gewürfelt haben, muss das Spiel abgebrochen werden. Wie muss man den Einsatz fair aufteilen?
3. Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wir definieren die Mengenabbildung $\tilde{\mathbb{P}} : \Omega \rightarrow [0, \infty)$,

$$A \mapsto \mathbb{E}[e^{\theta X - \theta\mu - \theta^2\sigma^2/2} \mathbb{1}_A],$$

wobei $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$, falls $\omega \in A$ und $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$, falls $\omega \notin A$.

- a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[e^{\theta X}] = e^{\theta\mu + \sigma^2\theta^2/2}$.
- b) Zeigen Sie, dass $\tilde{\mathbb{P}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass ist.
- c) Bestimmen Sie die Verteilung von X bezüglich des Masses $\tilde{\mathbb{P}}$.

4. Sei N eine Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{N} und Verteilung $p_k = \mathbb{P}[N = k]$. Seien $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ unabhängige Zufallsvariablen, unabhängig von N , mit Mittelwert $\mu = \mathbb{E}[X_k]$ und Varianz $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X_k - \mu)^2]$, wobei μ und σ^2 nicht von k abhängt. Wir setzen $S = \sum_{k=1}^N X_k$, wobei $\sum_{k=1}^0 X_k = 0$.

- a) Erklären Sie für eine (messbare) Funktion die Formel

$$\mathbb{E}[f(S)] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \mathbb{E}\left[f\left(\sum_{\ell=1}^k X_{\ell}\right)\right].$$

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{N=k} = 1$.

- b) Zeigen Sie $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mu$.
- c) Zeigen Sie $\mathbb{E}[S^2] = \mathbb{E}[N^2]\mu^2 + \mathbb{E}[N]\sigma^2$.
- d) Zeigen Sie $\text{Var}[S] = \text{Var}[N]\mu^2 + \mathbb{E}[N]\sigma^2$.

5. Betrachten wir die logarithmische Verteilung

$$\mathbb{P}[N = k] = \frac{q^k}{-k \log(1 - q)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad q \in (0, 1).$$

- a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[N]$.

Wir beobachten die Daten N_1, N_2, \dots, N_n .

- b) Geben Sie eine (soweit wie möglich vereinfachte) Gleichung an, um den Maximum-Likelihood-Schätzer für q zu bestimmen.
- c) Geben Sie eine (soweit wie möglich vereinfachte) Gleichung an, um den Momentenschätzer von q zu bestimmen.

6. Seien $\{X_i\}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in \mathbb{N} . Die folgende Tabelle zeigt die Häufigkeiten der verschiedenen Werte:

Wert	0	1	2	3	4	5
Häufigkeit	6	7	33	39	9	6

Werte, die 5 überschreiten sind nicht aufgetreten. Es wird vermutet, dass die Daten von einer Poissonverteilung stammen.

- a) Schätzen Sie den Parameter der Poissonverteilung.
- b) Testen Sie auf dem 5% Niveau, ob die Daten von einer Poissonverteilung mit dem unter a) geschätzten Parameter stammen.

Untere Quantile der χ^2 -Verteilung

$$\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \int_0^{q(P)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} dx = \frac{P}{100} .$$

$\nu \backslash P$	0.1	0.5	1	2.5	5	10	15	20	25	50
1	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$9.8 \cdot 10^{-4}$	0.0039	0.1579	0.0358	0.0642	0.1015	0.4549
2	0.0020	0.0100	0.0210	0.0506	0.1026	0.2107	0.3250	0.4463	0.5754	1.3863
3	0.0243	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	0.7978	1.0052	1.2125	2.3660
4	0.0908	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	1.3665	1.6488	1.9226	3.3567
5	0.2102	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	1.9938	2.3425	2.6746	4.3515
6	0.3811	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	2.6613	3.0701	3.4546	5.3481
7	0.5985	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	3.3583	3.8223	4.2549	6.3458
8	0.8571	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	4.0782	4.5936	5.0706	7.3441
9	1.1519	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	4.8165	5.3801	5.8988	8.3428
10	1.4787	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	5.5701	6.1791	6.7372	9.3418
11	1.8339	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	6.3364	6.9887	7.5841	10.341
12	2.2142	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	7.1138	7.8073	8.4384	11.340
13	2.6172	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	7.9008	8.6339	9.2991	12.340
14	3.0407	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	8.6963	9.4673	10.165	13.339
15	3.4827	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	9.4993	10.307	11.037	14.339
16	3.9416	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	10.309	11.152	11.912	15.338
17	4.4161	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.085	11.125	12.002	12.792	16.338
18	4.9048	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.865	11.946	12.857	13.675	17.338
19	5.4068	6.8440	7.6327	8.9065	10.117	11.651	12.773	13.716	14.562	18.338
20	5.9210	7.4338	8.2604	9.5908	10.851	12.443	13.604	14.578	15.452	19.337
21	6.4467	8.0337	8.8972	10.283	11.591	13.240	14.439	15.445	16.344	20.337
22	6.9830	8.6427	9.5425	10.982	12.338	14.041	15.279	16.314	17.240	21.337
23	7.5292	9.2604	10.196	11.689	13.091	14.848	16.122	17.187	18.137	22.337
24	8.0849	9.8862	10.856	12.401	13.848	15.659	16.969	18.062	19.037	23.337
25	8.6493	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	17.818	18.940	19.939	24.337
26	9.2221	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	18.671	19.820	20.843	25.336
27	9.8028	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	19.527	20.703	21.749	26.336
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	20.386	21.588	22.657	27.336
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	21.247	22.475	23.567	28.336
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	22.110	23.364	24.478	29.336
31	12.196	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	22.976	24.255	25.390	30.336
32	12.811	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	23.844	25.148	26.304	31.336
33	13.431	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	24.714	26.042	27.219	32.336
34	14.057	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	25.586	26.938	28.136	33.336
35	14.688	17.192	18.509	20.569	22.466	24.797	26.460	27.836	29.054	34.336
36	15.324	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	27.336	28.735	29.973	35.336
37	15.965	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	28.214	29.635	30.893	36.336
38	16.611	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	29.093	30.537	31.815	37.335
39	17.262	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	29.974	31.441	32.737	38.335
40	17.916	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	30.856	32.345	33.660	39.335
50	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	39.754	41.449	42.942	49.335
60	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	48.759	50.641	52.294	59.335
70	39.036	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	57.844	59.898	61.698	69.334
80	46.520	51.172	53.540	57.153	60.391	64.279	66.994	69.207	71.144	79.334
90	54.155	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	76.195	78.558	80.625	89.334
100	61.918	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	85.441	87.945	90.133	99.334

Obere Quantile der χ^2 -Verteilung

$$\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \int_{q(P)}^{\infty} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} dx = \frac{P}{100}.$$

$\nu \backslash P$	50	25	20	15	10	5	2.5	1	0.5	0.1
1	0.4549	1.3233	1.6424	2.0723	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794	10.827
2	1.3863	2.7726	3.2189	3.7942	4.6052	5.9915	7.3778	9.2104	10.597	13.815
3	2.3660	4.1083	4.6416	5.3170	6.2514	7.8147	9.3484	11.344	12.838	16.266
4	3.3567	5.3853	5.9886	6.7454	7.7794	9.4877	11.143	13.277	14.860	18.466
5	4.3515	6.6257	7.2893	8.1152	9.2363	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	5.3481	7.8408	8.5581	9.4461	10.645	12.592	14.449	16.812	18.475	22.457
7	6.3458	9.0372	9.8032	10.748	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	7.3441	10.219	11.030	12.027	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	8.3428	11.389	12.242	13.288	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	9.3418	12.549	13.442	14.534	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	10.341	13.701	14.631	15.767	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	11.340	14.845	15.812	16.989	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.909
13	12.340	15.984	16.985	18.202	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.527
14	13.339	17.117	18.151	19.406	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.124
15	14.339	18.245	19.311	20.603	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.698
16	15.338	19.369	20.465	21.793	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	16.338	20.489	21.615	22.977	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.791
18	17.338	21.605	22.760	24.155	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	18.338	22.718	23.900	25.329	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.819
20	19.337	23.828	25.038	26.498	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.314
21	20.337	24.935	26.171	27.662	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.796
22	21.337	26.039	27.301	28.822	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	22.337	27.141	28.429	29.979	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	23.337	28.241	29.553	31.132	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558	51.179
25	24.337	29.339	30.675	32.282	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.619
26	25.336	30.435	31.795	33.429	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.051
27	26.336	31.528	32.912	34.574	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.475
28	27.336	32.620	34.027	35.715	37.916	41.337	44.461	48.278	50.994	56.892
29	28.336	33.711	35.139	36.854	39.087	42.557	45.722	49.588	52.335	58.301
30	29.336	34.800	36.250	37.990	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.702
31	30.336	35.887	37.359	39.124	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003	61.098
32	31.336	36.973	38.466	40.256	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328	62.487
33	32.336	38.058	39.572	41.386	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648	63.870
34	33.336	39.141	40.676	42.514	44.903	48.603	51.966	56.061	58.964	65.247
35	34.336	40.223	41.778	43.640	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
36	35.336	41.304	42.879	44.764	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581	67.985
37	36.336	42.383	43.978	45.886	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883	69.346
38	37.335	43.462	45.076	47.007	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181	70.703
39	38.335	44.539	46.173	48.126	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476	72.055
40	39.335	45.616	47.269	49.244	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.403
50	49.335	56.334	58.164	60.346	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.660
60	59.335	66.981	68.972	71.341	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.608
70	69.334	77.577	79.715	82.255	85.527	90.531	95.023	100.43	104.21	112.32
80	79.334	88.130	90.405	93.106	96.578	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84
90	89.334	98.650	101.05	103.90	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30	137.21
100	99.334	109.14	111.67	114.66	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45