

Lösung der Klausur

1. a) Nach der Bayes'schen Regel ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient Medikament A erhalten hat

$$\frac{0.5 \cdot 0.1}{0.5 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.03} \approx 0.684932 ,$$

Medikament B

$$\frac{0.4 \cdot 0.05}{0.5 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.03} \approx 0.273973 ,$$

und Medikament C

$$\frac{0.1 \cdot 0.03}{0.5 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.03} \approx 0.041096 .$$

- b) Die Wahrscheinlichkeiten sind in diesem Falle

$$\frac{0.4 \cdot 0.05}{0.4 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.03} \approx 0.869565$$

für Medikament B und

$$\frac{0.1 \cdot 0.03}{0.4 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.03} \approx 0.130435$$

für Medikament C. Alternativ hätte man die Wahrscheinlichkeit auch aus a) mit

$$\frac{0.273973}{0.273973 + 0.041096} \approx 0.869565$$

erhalten können.

- c) Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich zu

$$\frac{0.4 \cdot 0.05 \cdot 0.95}{0.4 \cdot 0.05 \cdot 0.95 + 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.97} \approx 0.867184$$

für Medikament B und

$$\frac{0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.97}{0.4 \cdot 0.05 \cdot 0.95 + 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.97} \approx 0.132816$$

für Medikament C. Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich nur geringfügig.

2. a) Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt. Würfelt A keine Sechs, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass B gewinnt auch p , also

$$p = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}(1 - p) .$$

Daraus schliesst man $p = 1/(11/6) = 6/11$. Der mittlere Gewinn für A ist somit $\frac{6}{11}b - \frac{5}{11}a$, für Spieler B $\frac{5}{11}a - \frac{6}{11}b$.

- b) Damit das Spiel fair ist, muss der mittlere Gewinn $\frac{6}{11}b - \frac{5}{11}a = 0$ erfüllen. Also ist der faire Einsatz $a = 6\text{€}$, $b = 5\text{€}$.
- c) Als nächstes hätte Spieler B gewürfelt, und mit Wahrscheinlichkeit $6/11$ gewonnen. Also gehören ihm $6/11$ des Einsatzes, also 6€ . Spieler A bekommt 5€ .

3. a) Wir haben

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\theta X}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^2/\sigma^2\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2}(x - \mu - \theta\sigma^2)^2/\sigma^2\} \exp\{\mu\theta + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\} dx \\ &= \exp\{\mu\theta + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\} , \end{aligned}$$

da $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2}(x - \mu - \theta\sigma^2)^2/\sigma^2\}$ die Dichte einer Normalverteilung mit Mittelwert $\theta\sigma^2 + \mu$ und Varianz σ^2 ist.

- b) i) Wir haben aus a)

$$\tilde{\mathbb{P}}[\Omega] = \mathbb{E}[e^{\theta X - \theta\mu - \theta^2\sigma^2/2}] = 1 .$$

- ii) Seien $A_k \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt. Dann folgt aus der Additivität des Erwartungswertes (und monotoner Konvergenz)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}[\cup_n A_n] &= \mathbb{E}[e^{\theta X - \theta\mu - \theta^2\sigma^2/2} \mathbb{I}_{\cup_n A_n}] = \mathbb{E}\left[e^{\theta X - \theta\mu - \theta^2\sigma^2/2} \sum_n \mathbb{I}_{A_n}\right] \\ &= \sum_n \mathbb{E}[e^{\theta X - \theta\mu - \theta^2\sigma^2/2} \mathbb{I}_{A_n}] = \sum_n \tilde{\mathbb{P}}[A_n] . \end{aligned}$$

Somit ist $\tilde{\mathbb{P}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass.

- c) Wie in a) erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}[X \leq x] &= \int_{-\infty}^x e^{\theta y - \theta\mu - \theta^2\sigma^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2}(y - \mu)^2/\sigma^2\} dy \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2}(y - \mu - \theta\sigma^2)^2/\sigma^2\} dy . \end{aligned}$$

Dies ist die Dichte einer Normalverteilung mit Mittelwert $\theta\sigma^2 + \mu$ und Varianz σ^2 . Somit ist X normalverteilt mit Mittelwert $\theta\sigma^2 + \mu$ und Varianz σ^2 bezüglich des Masses $\tilde{\mathbb{P}}$.

4. a) Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(S)] &= \mathbb{E}\left[f(S) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{N=k}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{N=k} f\left(\sum_{\ell=1}^N X_{\ell}\right)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{N=k} f\left(\sum_{\ell=1}^k X_{\ell}\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \mathbb{E}\left[f\left(\sum_{\ell=1}^k X_{\ell}\right)\right],\end{aligned}$$

wobei wir die Linearität des Erwartungswertes und die Unabhängigkeit von N und $\{X_k\}$ verwendet haben.

b) Mit $f(x) = x$ ist $\mathbb{E}[\sum_{\ell=1}^k X_{\ell}] = k\mu$, und somit

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k\mu = \mathbb{E}[N]\mu.$$

c) Mit $f(x) = x^2$ erhalten wir

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{\ell=1}^k X_{\ell}\right)^2\right] = \text{Var}\left[\sum_{\ell=1}^k X_{\ell}\right] + \left(\mathbb{E}\left[\sum_{\ell=1}^k X_{\ell}\right]\right)^2 = k\sigma^2 + (k\mu)^2,$$

wobei wir die Unabhängigkeit der X_{ℓ} verwendet haben. Somit erhalten wir

$$\mathbb{E}[S^2] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (k\sigma^2 + k^2\mu^2) = \mathbb{E}[N]\sigma^2 + \mathbb{E}[N^2]\mu^2.$$

d) Wir haben

$$\begin{aligned}\text{Var}[S] &= \mathbb{E}[S^2] - (\mathbb{E}[S])^2 = \mathbb{E}[N]\sigma^2 + \mathbb{E}[N^2]\mu^2 - (\mathbb{E}[N]\mu)^2 \\ &= \mathbb{E}[N]\sigma^2 + \text{Var}[N]\mu^2.\end{aligned}$$

5. a) Für den Erwartungswert erhalten wir

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{q^k}{-k \log(1-q)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{-\log(1-q)} = \frac{q}{-(1-q) \log(1-q)}.$$

b) Die log-Likelihoodfunktion wird

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (N_k \log q - \log N_k - \log(-\log(1-q))) \\ &= \log q \sum_{k=1}^n N_k - \sum_{k=1}^n \log N_k - n \log(-\log(1-q)) . \end{aligned}$$

Leiten wir nach q ab und setzen die Ableitung 0, erhalten wir

$$\frac{1}{q} \sum_{k=1}^n N_k - \frac{n \frac{1}{1-q}}{-\log(1-q)} = 0 .$$

Dies ergibt die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n N_k = \frac{nq}{-(1-q)\log(1-q)} .$$

c) Der Momentenschätzer wird

$$\frac{q}{-(1-q)\log(1-q)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_k .$$

Somit stimmen Maximum-Likelihood und Momentenschätzer überein.

6. a) Es sind $6 + 7 + 33 + 39 + 9 + 6 = 100$ Daten vorhanden. Nach dem Skript sind der Maximum-Likelihood-Schätzer und der Momentenschätzer für den Parameter

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{100} X_k = 7 \cdot 1 + 33 \cdot 2 + 39 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 2.56 .$$

b) Die Wahrscheinlichkeiten einer Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = 2.56$ sind

| Wert | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Wahrscheinlichkeit | 0.0773 | 0.1979 | 0.2533 | 0.2162 | 0.1383 | 0.0708 |
| Erwartete Anzahl | 7.73 | 19.79 | 25.33 | 21.62 | 13.83 | 7.08 |

Um den χ^2 -Anpassungstest zu verwenden, benötigen wir die Statistik

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=0}^5 \frac{(n_k - \bar{n}_k)^2}{\bar{n}_k} \\ &= \frac{(6 - 7.73)^2}{7.73} + \frac{(7 - 19.79)^2}{19.79} + \frac{(33 - 25.33)^2}{25.33} + \frac{(39 - 21.62)^2}{21.62} \\ &\quad + \frac{(9 - 13.83)^2}{13.83} + \frac{(6 - 7.08)^2}{7.08} \approx 26.7988 . \end{aligned}$$

Diese Grösse ist unter the Hypothese näherungsweise χ^2 -verteilt mit 5 Freiheitsgraden. Aus der Tabelle sehen wir, dass auf dem 5%-Niveau ein Wert zwischen 0.8312 und 12.833 erwartet werden könnte. Damit verwirft der Test die Annahme, dass die Daten Poissonverteilt sind. Alternativ lässt sich auch ein einseitiger Test verwenden mit dem Intervall $(0, 11.070)$ verwenden, der ebenfalls verwirft.

Die Daten wurden mit einer Binomialverteilung mit $n = 5$ und $p = \frac{1}{2}$ simuliert.