

## Nachklausur 27.3.2014

1. In einer Stadt werden 3 Arten von Schwangerschafts-Selbsttests verkauft. Die folgende Tabelle gibt die relativen Häufigkeiten, mit denen die Tests verkauft werden und die Wahrscheinlichkeiten, dass das Resultat positiv ist:

	Test 1	Test 2	Test 3
Verkaufshäufigkeit	60%	30%	10%
positiv (schwanger)	0.92	0.96	0.98
positiv (nicht schwanger)	0.07	0.05	0.01

Wir fassen die relativen Häufigkeiten im weiteren als Wahrscheinlichkeiten auf. Erfahrungsgemäss sind  $\frac{3}{4}$  der Frauen schwanger, die einen Schwangerschaftstest kaufen. Wir nehmen an, dass die Tatsache, dass eine Frau schwanger ist oder nicht, keinen Einfluss darauf hat, welchen der Tests sie verwendet.

Eine Frau kommt zum Arzt, weil sie einen positiven Schwangerschaftstest hat.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau wirklich schwanger ist?
  - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Frau Test 1, 2, 3 verwendet?
  - c) Der Arzt stellt fest, dass die Frau nicht schwanger ist. Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau Test 1, 2, 3 verwendet hat?
2. Drei Spieler A, B und C zahlen den Einsatz  $a$ , beziehungsweise  $b$  und  $c$ . Danach werfen sie abwechslungsweise zwei faire Münze, wobei zuerst Spieler A, dann Spieler B und als drittes Spieler C wirft. Danach beginnt die Reihenfolge wieder von vorne. Der erste Spieler, der zweimal Kopf wirft, gewinnt den Einsatz  $a+b+c$ .
- a) Wie gross ist der mittlere Gewinn jeweils für Spieler A, B und C?
  - b) Wie gross sind  $a, b, c$ , wenn der Gesamteinsatz  $a + b + c = 74\text{€}$  beträgt und das Spiel fair sein soll?
  - c) Spieler A wirft zuerst die eine Münze und erzielt Kopf. Wie gross ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt, und wie gross ist der bedingte mittlere Gewinn?

3. Die gemeinsame Verteilung der Variablen  $X$  und  $Y$  sei gegeben durch

$$F(x, y) = 1 - \frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 y^2 - 1}, \quad x, y > 1.$$

- a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von  $X$  und  $Y$ .
- b) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung (oder bedingte Dichte) von  $X$  gegeben  $\{Y = y\}$ .
4. Die Variablen  $\{X_k : 1 \leq k \leq n\}$  seien unabhängig mit der gleichen Verteilungsfunktion gegeben durch die Dichte

$$f(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi(\beta + x^2)}, \quad \beta > 0.$$

- a) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\beta$  durch die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{1 + X_k^2/\beta} \right) = \frac{1}{2}$$

gegeben ist.

- b) Existiert der Erwartungswert  $\mathbb{E}[X_k]$ ?
- c) Berechnen Sie  $\mathbb{E}[\sqrt{|X_k|}]$ .  
**Hinweis:**  $\int_0^\infty \sqrt{2x}/(1+x^2) dx = \pi$ .
- d) Geben Sie ein Schätzverfahren für  $\beta$  an, das ähnlich zur Momentenmethode funktioniert.
5. Die Variablen  $\{X_k : 1 \leq k \leq n\}$  seien unabhängig und identisch verteilt. Ein Forscher behauptet, die Daten seien standard normalverteilt, eine Forscherkollegin behauptet, die Daten seien zweiseitig exponentialverteilt mit Dichte  $\exp\{-\sqrt{2}|x|\}/\sqrt{2}$ . Zeigen Sie, dass der kritische Bereich des optimalen Tests der Hypothese “normalverteilt” gegen die Alternative “zweiseitig exponentialverteilt” von der Form

$$K = \left\{ \sum_{k=1}^n (|X_k| - \sqrt{2})^2 > c(n) \right\}$$

ist.

6. Die Variablen  $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$  seien unabhängig mit  $\mathbb{P}[X_k = 1] = \mathbb{P}[X_k = -1] = \frac{1}{2}$ . Wir setzen  $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$ . Zeigen Sie:
- a)  $\mathbb{P}[Y_n = 1] = \mathbb{P}[Y_n = -1] = \frac{1}{2}$  (z.B. mit Induktion).
- b) Die Variablen  $\{Y_k : k \in \mathbb{N}\}$  sind unabhängig.