Lösung der Nachklausur

1. a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine schwangere Frau einen positiven Test hat ist $0.6 \cdot 0.92 + 0.3 \cdot 0.96 + 0.1 \cdot 0.98 = 0.938$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht schwangere Frau einen positiven Test hat ist $0.6 \cdot 0.07 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.01 = 0.058$. Somit wird die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau Schwanger ist

$$\frac{0.75 \cdot 0.938}{0.75 \cdot 0.938 + 0.25 \cdot 0.058} \approx 0.979805\ .$$

b) Die Wahrscheinlichkeit eines positiven Test bei Test 1 ist $0.75 \cdot 0.92 + 0.25 \cdot 0.07 = 0.7075$, bei Test 2 $0.75 \cdot 0.96 + 0.25 \cdot 0.05 = 0.7325$ und bei Test 3 $0.75 \cdot 0.98 + 0.25 \cdot 0.01 = 0.7375$. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass Test 1 verwendet wurde nach der Bayes-Formel

$$\frac{0.6 \cdot 0.7075}{0.6 \cdot 0.7075 + 0.3 \cdot 0.7325 + 0.1 \cdot 0.7375} \approx 0.591226\ .$$

Die Wahrscheinlichkeit für Test 2 ist

$$\frac{0.3 \cdot 0.7325}{0.6 \cdot 0.7075 + 0.3 \cdot 0.7325 + 0.1 \cdot 0.7375} \approx 0.306058\ .$$

Somit ist die Wahrcheinlichkeit, dass der dritte Test verwendet wurde $1 - 0.591226 - 0.306058 = 0.102716$.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht schwangere Frau mit einem positiven Test den ersten Test verwendet hat, ist

$$\frac{0.6 \cdot 0.07}{0.6 \cdot 0.07 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.01} \approx 0.724138\ ,$$

den zweiten Test verwendet hat

$$\frac{0.3 \cdot 0.05}{0.6 \cdot 0.07 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.01} \approx 0.258621\ ,$$

und den dritten Test $1 - 0.724138 - 0.258621 = 0.017241$.

2. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A gewinnt, und q die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B gewinnt. Wirft Spieler A die beiden Münzen und gewinnt nicht, so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass er gewinnt $1-p-q$ und die Wahrscheinlichkeit, dass B gewinnt ist p. Also erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} p &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}(1-p-q) \;, \\ q &= \tfrac{3}{4}p \;. \end{aligned}$$

Dies ergibt $p = 16/37$ und $q = 12/37$.

a) Der mittlere Gewinn für A wird $\frac{16}{37}(b+c) - \frac{21}{37}a$. Der mittlere Gewinn für B ist $\frac{12}{37}(a+c) - \frac{25}{37}b$. Der mittlere Gewinn für C ist $\frac{9}{37}(a+b) - \frac{28}{37}c$.

b) Spieler A sollte $\frac{16}{37}74€ = 32€$ bezahlen, Spieler B sollte $\frac{12}{37}74€ = 24€$ Einsatz zahlen. Damit bleiben für Spieler C 18€.

c) Wirft er mit der anderen Münze auch Kopf, so gewinnt A, ansonsten ist die Wahrscheinlichkeit $(1-p-q) = \frac{9}{37}$. Somit ist die begingte Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tfrac{9}{37} = \tfrac{23}{37} \;.$$

Der bedingte mittlere Gewinn wird nun

$$\frac{23}{37}42€ - \frac{14}{37}32€ = \frac{518}{37}€ = 14€ \;.$$

3. **a)** Lassen wir $y \to \infty$, erhalten wir

$$F_X(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - x^{-2} \;.$$

Damit ist X Paretoverteilt. Wegen der Symmetrie hat Y die selbe Randverteilung.

b) Die Dichte von Y ist $f_Y(y) = 2y^{-3}$ für $y > 1$. Die gemeinsame Dichte wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{x^2y^2-1} &= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{2y(x^2y^2-1) - 2yx^2(x^2+y^2-2))}{(x^2y^2-1)^2} \\ &= 2y\frac{\partial}{\partial x}\frac{(x^2-1)^2}{(x^2y^2-1)^2} = 2y\frac{4x(x^2-1)(x^2y^2-1) - 4(x^2-1)^2xy^2}{(x^2y^2-1)^3} \\ &= \frac{8xy(x^2-1)(y^2-1)}{(x^2y^2-1)^3} \end{aligned}$$

Die bedingte Dichte wird also

$$f(x \mid y) = \frac{\frac{8xy(x^2-1)(y^2-1)}{(x^2y^2-1)^3}}{2y^{-3}} = \frac{4xy^4(x^2-1)(y^2-1)}{(x^2y^2-1)^3} \;.$$

Integrieren wir, erhalten wir

$$F(x \mid y) = \frac{y^4(x^2-1)^2}{(x^2y^2-1)^2} \, .$$

(Für die Lösung reicht die Dichte).

4. **a)** Der log-Likelihood wird

$$\sum_{k=1}^{n}\{\tfrac{1}{2}\log\beta - \log\pi - \log(\beta + x_k^2)\} = \frac{n}{2}\log\beta - n\log\pi - \sum_{k=1}^{n}\log(\beta + x_k^2) \, .$$

Ableiten und Nullsetzen ergibt

$$\frac{n}{2\beta} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\beta + x_k^2} = 0 \, .$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung. Die Lösung ist eindeutig, da die linke Seite stetig wachsend in β ist, Null in Null und Eins in Unendlich.

b) Wir haben für $z = x^2$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\beta}\, x}{\pi(\beta + x^2)}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\beta}}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\beta + z}\, \mathrm{d}z = \infty \, ,$$

und wegen der Symmetrie $\int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{\beta}x}{\pi(\beta+x^2)}\, \mathrm{d}x = -\infty$. Daher existiert der Erwartungswert nicht.

c) Setzen wir $x = z\sqrt{\beta}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{\beta|x|}}{\pi(\beta + x^2)}\, \mathrm{d}x &= 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{\beta^{3/2}z}}{\pi(\beta + \beta z^2)}\sqrt{\beta}\, \mathrm{d}z = \frac{\sqrt{2\beta^{1/2}}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{2z}}{1+z^2}\, \mathrm{d}z \\ &= \sqrt{2\beta^{1/2}} \, .\end{aligned}$$

d) Wir können $\mathbb{E}[\sqrt{X_k}]$ schätzen durch $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{|X_k|}$. Setzen wir das empirische Moment gleich dem geschätzten, so erhalten wir den Schätzer

$$\hat{\beta} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{|X_k|}\Big)^4 \, .$$

5. Wir verwenden den Likelihood-Quotiententest. Der Likelihood-Quotient für einen Datenpunkt ist

$$\frac{\exp\{-\sqrt{2}|x|\}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}\exp\{-x^2/2\}} = \sqrt{\pi}\exp\{\tfrac{1}{2}(x^2 - 2\sqrt{2}|x|)\} = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-1}\exp\{\tfrac{1}{2}(|x| - \sqrt{2})^2\} \, .$$

Somit wird der Likelihood Quotient für die gesamte Stichprobe

$$\pi^{n/2} \mathrm{e}^{-n} \exp\Big\{ \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (|x_k| - \sqrt{2})^2 \Big\} \,.$$

Der Likelihood-Quotiententest ist damit von der Form

$$K = \Big\{ \pi^{n/2} \mathrm{e}^{-n} \exp\Big\{ \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (|X_k| - \sqrt{2})^2 \Big\} > \tilde{c} \Big\} \,.$$

Da die Exponentialfunktion monoton steigend ist, können wir K als

$$K = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} (|X_k| - \sqrt{2})^2 \Big\} > 2 \log(\tilde{c} \mathrm{e}^{n} \pi^{-n/2}) \Big\}$$

ausdrücken, was die verlangte Form ist.

6. Die Variablen Y_n nehmen die Werte ± 1 an.

a) Wir zeigen mit Induktion, dass $\mathbb{P}[Y_n = 1] = \frac{1}{2}$. Da $Y_1 = X_1$, gilt dies für $n = 1$. Da Y_n nicht von X_{n+1} abhängt, sind Y_n und X_{n+1} unabhängig. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y_{n+1} = 1] &= \mathbb{P}[Y_n = 1, X_{n+1} = 1] + \mathbb{P}[Y_n = -1]\mathbb{P}[X_{n+1} = -1] \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \,. \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{P}[Y_{n+1} = -1] = 1 - \mathbb{P}[Y_{n+1} = 1] = \frac{1}{2}$.

b) Wir müssen zeigen, dass die Ereignisse $\{Y_n = 1\}$ unabhängig sind (HS 1.27), also dass $\mathbb{P}[Y_k = 1, k \in J] = (\frac{1}{2})^{|J|}$. Sei $J \subset \mathbb{N}$ endlich. Wir zeigen die Behauptung mit Induktion nach der Mächtigkeit $|J|$ von J. Ist $|J| = 1$, so ist nichts zu zeigen. Ist $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n, j_{n+1}\}$ mit $j_1 < j_2 < \cdots < j_n < j_{n+1}$, so ist

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[Y_{j_k} = 1, 1 \le k \le n+1] \\ &\quad = \mathbb{P}[X_{j_n+1} X_{j_n+2} \cdots X_{j_{n+1}} = 1, Y_{j_k} = 1, 1 \le k \le n] \\ &\quad = \mathbb{P}[X_{j_n+1} X_{j_n+2} \cdots X_{j_{n+1}} = 1] \mathbb{P}[Y_{j_k} = 1, 1 \le k \le n] \\ &\quad = \mathbb{P}[Y_{j_{n+1} - j_n} = 1] \mathbb{P}[Y_{j_k} = 1, 1 \le k \le n] = \tfrac{1}{2} (\tfrac{1}{2})^n = (\tfrac{1}{2})^{n+1} \,. \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass $\{Y_k : 1 \le k \le n\}$ und $\{X_\ell : j_n + 1 \le \ell \le j_{n+1}\}$ unabhängig sind, und dass $X_{j_n+1} X_{j_n+2} \cdots X_{j_{n+1}}$ die selbe Verteilung hat wie $Y_{j_{n+1} - j_n}$. Damit ist die Aussage bewiesen.