Klausur 22.2.2017

1. Die folgende Tabelle gibt den Anteil von je fünf Altergruppen nach Geschlecht getrennt sowie die Sterblichkeit der entsprechenden Altergruppe. Zum Beispiel, eine zufällig gewählte über 80-jährige Frau wird mit Wahrscheinlichkeit 0.09012 im nächsten Jahr sterben. Wir fassen im folgenden die Anteile an der Bevölkerung als Wahrscheinlichkeiten auf.

Frauen						
Alter	0–19	20–39	40–64	65–79	80–	0–
Anteil Bevölkerung (%)	9.83	13.20	17.54	6.82	3.16	50.55
Sterblichkeit (%)	0.022	0.026	0.185	1.145	9.012	
Männer						
Alter	0–19	20–39	40–64	65–79	80–	0–
Anteil Bevölkerung (%)	10.37	13.49	17.78	6.01	1.80	49.45
Sterblichkeit (%)	0.039	0.048	0.313	1.943	10.674	

a) (5 P) Sie erhalten die Information, dass eine unter 20-jährige Person gestorben ist. Mit welcher Wahrscheinlickeit ist die Person weiblich?

b) (7 P) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für jede Altersgruppe, dass ein zufällig ausgewählter verstorbener Mann zu dieser Altersgruppe gehört hat.

2. Die Variablen $\{X_k\}$ stammen von unabhängigen 0-1-Experimenten, wobei

$$\mathbb{P}[X_k = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_k = 0] = p_k \;.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\Bigl[\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty\Bigr] \in \{0, 1\}$$

und geben Sie ein Kriterium für die $\{p_k\}$, wann $\mathbb{P}[\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty] = 1$. Untersuchen Sie insbesondere den Fall $p_k = k^{-1}$ und $p_k = k^{-2}$.

3. Bei einem Spiel mit n Feldern ist jedes der Felder entweder mit einem weissen oder einem schwarzen Stein besetzt. In jedem Schritt wird ein Feld zufällig ausgewählt (Gleichverteilung) und die Farbe des Steins notiert. Dann wird eines der verbliebenen Felder ausgewählt (Gleichverteilung), und der Stein auf dem Feld durch einen Stein der notierten Farbe ersetzt. Das heisst, die beiden ausgewählten Felder haben danach jeweils einen Stein der selben Farbe. Das Spiel wird nun unendlich lange fortgesetzt. Wir bezeichnen mit X_ℓ die Anzahl der weissen Steine auf den Feldern nach dem ℓ-ten Schritt. Zu Beginn ist $X_0 = k$ mit $0 \leq k \leq n$.

a) (4 P) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X_1 = m]$ für $m \in \{k-1, k, k+1\}$.

b) (3 P) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X_1 = m \mid X_1 \neq X_0]$ für $m \in \{k-1, k+1\}$ und $k \notin \{0, n\}$.

Sei $\ell_0 = 0$ und $\ell_j = \inf\{h : X_h \neq X_{\ell_{j-1}}\}$. Dann bildet $Y_j = X_{\ell_j}$, den Prozess, bei dem nur Zeitpunkte betrachtet werden, an denen sich X_ℓ ändert.

c) (2 P) Berechnen Sie $\mathbb{P}[Y_1 = m]$ für $m \in \{k-1, k+1\}$ und $k \notin \{0, n\}$.

d) (3 P) Zeigen Sie, das es einen Zeitpunkt gibt, an dem alle Felder mit einem Stein derselben Farbe besetzt sind und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass schliesslich alle Steine weiss sind.

4. Die Variable U sei auf $(0, 1)$ gleichverteilt. Gegeben $\{U = u\}$ sei X geometrisch verteilt mit Parameter $\sqrt{u}$, $\mathbb{P}[X = k \mid U = u] = u^{(k-1)/2}(1 - \sqrt{u})$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

a) (4 P) Bestimmen Sie die Randverteilung von X.

Hinweis:
$$\int_0^1 z^k (1-z)^\ell \, \mathrm{d}z = \frac{k!\ell!}{(k+\ell+1)!} \ .$$

b) (4 P) Bestimmen Sie die Erzeugendenfunktion $\mathbb{E}[z^X]$ für $|z| \leq 1$.

Hinweis:
$$\frac{z^{k+2}}{(k+1)(k+2)} = \int_0^z \int_0^u v^k \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \ .$$

c) (4 P) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von U gegeben $X = 3$.

5. Die Variablen $\{X_k : 1 \leq k \leq n\}$ werden als unabhängig $\Gamma(3, \alpha)$ verteilt modelliert, also mit der Dichte

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha^3}{2} x^2 \mathrm{e}^{-\alpha x} \ .$$

Schätzen Sie den Parameter α mit der

a) (2 P) Momentenmethode,

b) (5 P) Maximum-Likelihood Methode.

c) (5 P) mit der Bayes'schen Methode mit apriori exponential verteiltem α $F_\alpha(a) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta a}$ mit einem $\beta > 0$.

6. Ein Aktuar und eine Aktuarin einer Rückversicherung modellieren Schäden einer Sparte durch eine Pareto-Verteilung mit der Verteilung

$$F_\alpha(x) = (1 - x^{-\alpha})\mathbb{1}_{x>1} \ .$$

Es liegen $n = 23$ Beobachtungen vor. Der Aktuar schätzt den Parameter α mit der Momentenmethode $\tilde{\alpha} = 1.43664$. Die Aktuarin schätzt den Parameter aus den Logarithmen der Daten $\log X_k$, und erhält $\hat{\alpha} = 1.17754$.

a) (2 P) Bestimmen Sie die Verteilung von $\log X_k$.

Die Aktuarin will mit einem Test nachweisen, dass ihre Methode die richtige ist. Sie wählt daher einen Test zum Niveau 5%, der die Wahrscheinlichkeit maximiert, dass ihr der Nachweis gelingt.

b) (10 P) Führen Sie den Test für die Aktuarin durch, wenn Sie die Statistik $\sum_{k=1}^{23} \log X_k = 19.5323$ kennen.
Hinweis: Bestimmen Sie die Konstante für den kritischen Bereich mit einer Normalapproximation. Das entsprechende Quantil der standard Normalverteilung ist 1.645.