Lösung der Klausur

1. a) Mit Hilfe der Bayes-Formel erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{9.83 \cdot 0.022}{9.83 \cdot 0.022 + 10.37 \cdot 0.039} = 0.3484\;,$$

wobei wir Zähler und Nenner mit 100^2 multipliziert haben.

b) Der Nenner in der Bayes-Formel wird

$$10.37 \cdot 0.039 + 13.49 \cdot 0.048 + 17.78 \cdot 0.313 + 6.01 \cdot 1.943 + 1.80 \cdot 10.674 = 37.50772\,.$$

Damit erhalten wir mit der Bayes-Formel die Wahrscheinlichkeiten

Alter	0–19	20–39	40–64	65–79	80–
Wahrscheinlichkeit	0.01078	0.01726	0.14837	0.31133	0.51225

2. $\sum_{k=1}^\infty X_k < \infty$ gilt genau dann, wenn nur endlich viele $X_k = 1$ sind. Das Borel–Cantelli-Lemma sagt, dass falls $\sum_{k=1}^\infty p_k < \infty$, dann tritt $\{X_k = 1\}$ nur endlich oft auf. Da die X_k unabhängig sind, folgt aus $\sum_{k=1}^\infty p_k = \infty$, dass $\{X_k = 1\}$ unendlich oft eintritt. Dies bedeutet, $\sum_{k=1}^\infty X_k = \infty$ im Fall $p_k = k^{-1}$ und $\sum_{k=1}^\infty X_k < \infty$ im Fall $p_k = k^{-2}$.

3. a) Für $m = k-1$ muss zuerst ein schwarzes und dann ein weisses Feld gewählt werden. Die Wahrscheinlichkeit für ein schwarzes Feld ist $(n-k)/n$, für anschliessend ein weisses $k/(n-1)$. Somit ist

$$\mathbb{P}[X_1 = k-1] = \frac{(n-k)k}{n(n-1)} = \mathbb{P}[X_1 = k+1]\;,$$

wobei wir für die zweite Gleichung k und $n-k$ vertauscht haben. Somit ergibt sich

$$\mathbb{P}[X_1 = k] = 1 - 2\frac{(n-k)k}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}\;.$$

b) Da $\mathbb{P}[X_1 = k-1] = \mathbb{P}[X_1 = k+1]$, gilt $\mathbb{P}[X_1 = k-1 \mid X_1 \neq X_0] = \mathbb{P}[X_1 = k+1 \mid X_1 \neq X_0] = \frac{1}{2}$.

c) Sei $p = \mathbb{P}[X_1 \neq X_0]$. Dann ist

$$\mathbb{P}[\ell_1 = j, Y_1 = k+1] = (1-p)^{j-1} p \tfrac{1}{2} \;,$$

und damit

$$\mathbb{P}[Y_1 = k+1] = \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1} p \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} = \mathbb{P}[Y_1 = k-1] \;.$$

d) Der Prozess $\{Y_j\}$ ist eine Irrfahrt, die in k startet und in 0 oder n stoppt. Bei einer Irrfahrt werden die Werte 0 und n sicher erreicht. Das heisst $\{Y_j\}$ erreicht einen der Werte 0 und n. Alle Steine werden weiss, falls im Ruin-Problem n vor 0 ereicht wird. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit k/n.

4. a) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X = k] &= \int_0^1 u^{(k-1)/2}(1-\sqrt{u})\,\mathrm{d}u = 2\int_0^1 z^k(1-z)\,\mathrm{d}z = 2\frac{k!}{(k+2)!} \\ &= \frac{2}{(k+1)(k+2)} \;.\end{aligned}$$

b) Dies ergibt für $|z| \le 1$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[z^X] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{z^2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^z\int_0^u v^k\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{2}{z^2}\int_0^z\int_0^u \frac{v}{1-v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{z^2}\int_0^z (u + \log(1-u))\,\mathrm{d}u = 2\frac{z + (1-z)\log(1-z)}{z^2} - 1 \;.\end{aligned}$$

c) Es gilt für $u \in [0,1]$

$$\mathbb{P}[U \le u \mid X = 3] = \frac{\int_0^u v(1-\sqrt{v})\,\mathrm{d}v}{1/10} = 10\Big(\frac{u^2}{2} - \frac{u^{5/2}}{5/2}\Big) = u^2(5 - 4\sqrt{u}) \;.$$

5. a) Wir haben $\mathbb{E}_\gamma[X_k] = 3/\alpha$. Somit ist der Momentenschätzer

$$\hat{\alpha} = \frac{3n}{\sum_{k=1}^n X_k} \;.$$

b) Der Log-Likelihood ist

$$\sum_{k=1}^{n}[3\log\alpha - \log 2 + 2\log x_i - \alpha x_i] = 3n\log\alpha - \alpha\sum_{k=1}^{n} x_i - n\log 2 + 2\sum_{k=1}^{n}\log x_i \;.$$

Ableiten nach α und Nullsetzen ergibt

$$\frac{3n}{\alpha} - \sum_{k=1}^{n} x_i = 0 \; .$$

Somit ist der Maximum-Likelihood Schätzer mit dem Momentenschätzer identisch

$$\hat{\alpha} = \frac{3n}{\sum_{k=1}^{n} X_k} \; .$$

Dass es sich um ein Maximum handelt folgt aus der zweiten Ableitung $-3n/\alpha^2 < 0$.

c) Die gemeinsame Dichte der Daten und des Parameters α ist

$$\beta \mathrm{e}^{-\beta a} \prod_{k=1}^{n} \frac{a^3}{2} x_k^2 \mathrm{e}^{-a x_k} \mathbb{1}_{a>0} = a^{3n} \exp\Big\{-a\Big(\beta + \sum_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big\} \frac{\beta \prod_{k=1}^{n} x_k^2}{2^n} \mathbb{1}_{a>0} \; .$$

Die Terme, die von a abhängen gehören zu einer Gamma-Verteilung. Somit ist die aposteriori Verteilung $\Gamma(3n+1, \beta + \sum_{k=1}^{n} x_k)$, was man auch durch Bestimmung der Randverteilung der $\{X_k\}$ mittels Integration über die Randverteilung erhalten kann. Der aposteriori-Erwartungswert, und damit der Bayes-Schätzer ist daher

$$\hat{\alpha} = \frac{3n+1}{\beta + \sum_{k=1}^{n} X_k} \; .$$

6. a) Es gilt für $x > 0$

$$\mathbb{P}[\log X_k \le x] = \mathbb{P}[X_k \le \mathrm{e}^x] = 1 - (\mathrm{e}^x)^{-\alpha} = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} \; .$$

Somit ist $\log X_k$ exponentialverteilt mit Parameter α.

b) Die Aktuarin verwendet den Likelihood-Quotienten-Test mit der Hypothese $\alpha_0 = \tilde{\alpha}$, da sie die Hypothese verwerfen will. Wir erhalten den Likelihood-Quotienten

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} \hat{\alpha} x_k^{-\hat{\alpha}-1}}{\prod_{k=1}^{n} \tilde{\alpha} x_k^{-\tilde{\alpha}-1}} = \Big(\frac{\hat{\alpha}}{\tilde{\alpha}}\Big)^n \exp\Big\{(\tilde{\alpha} - \hat{\alpha}) \sum_{k=1}^{n} \log x_k\Big\} \; .$$

Da $\tilde{\alpha} > \hat{\alpha}$ kann der kritische Bereich als $\{n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \log x_k \ge c\}$ dargestellt werden. Aus einer Normalapproximation erhalten wir $c = \alpha_0^{-1} + 1.645\sqrt{(n\alpha_0^2)^{-1}} = 0.934824$. Die Teststatistik ist $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \log X_k = 0.84923$. Somit wird die Hypothese nicht verworfen.