Klausur 12.2.2020

1. Ein stochastischer Prozess $\{X_n\}$ auf $\mathbb{N}$ mit $X_0 = 0$ springt mit Wahrscheinlichkeit p zur nächsten Zahl und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ nach Null (oder bleibt in Null); $\mathbb{P}[X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k] = p = 1 - \mathbb{P}[X_{n+1} = 0 \mid X_n = k]$, wobei $p \in (0,1)$.

a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X_2 = k]$ für $k = 0, 1, 2$.

b) (6 Punkte) Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X_2 = k \mid X_3 = 0]$ für $k = 0, 1, 2$.

c) (2 Punkte) Sind die Variablen X_2 und X_3 unabhängig?

2. Seien $\{X_i\}$ unabhängige 0–1 Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Wir interessieren uns für das erstmalige Auftreten der Sequenz 11 beziehungsweise 10, $T_{11} = \inf\{k \ge 2 : X_{k-1} = 1, X_k = 1\}$ und $T_{10} = \inf\{k \ge 2 : X_{k-1} = 1, X_k = 0\}$. Sei nun $f_{1k} = \mathbb{E}[T_{1k}]$.

a) (6 Punkte) Erklären Sie, wieso die folgenden Gleichungen korrekt sind:

$$f_{11} = p(2p + (1-p)(f_{11} + 2)) + (1-p)(f_{11} + 1)\ ,$$
$$f_{10} = p\Big(\frac{1}{1-p} + 1\Big) + (1-p)(f_{10} + 1)\ .$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie f_{11} und f_{10}.

c) (3 Punkte) Erklären Sie, wieso auch im Fall $p = \frac{1}{2}$ die Werte f_{11} und f_{10} nicht identisch sind.

3. Sei $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ die klassische Irrfahrt. Betrachten wir die Irrfahrt $\{Z_n\}$, die in Null reflektiert wird. Das heisst, $\mathbb{P}[Z_{n+1} = 1 \mid Z_n = 0] = \mathbb{P}[Z_{n+1} = 0 \mid Z_n = 0] = \frac{1}{2}$ und $Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1}$, falls $Z_n > 0$. Dann gilt

$$Z_n = S_n - \min_{0 \le k \le n} S_k\ .$$

Sei

$$\tilde{S}_k = S_n - S_{n-k} = X_n + X_{n-1} + \cdots + X_{n-k+1}$$

die duale Irrfahrt.

a) (8 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe der dualen Irrfahrt, dass $\mathbb{P}[Z_n < a] = \mathbb{P}[T_a > n]$, wobei $a > 0$ und T_a der Zeitpunkt des ersten Besuches der klassischen Irrfahrt in a ist.

b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[Z_n = a] = \mathbb{P}[S_n \in [a, a+1]]$ und bestimmen Sie eine explizite Formel für $\mathbb{P}[Z_n = a]$ für den Fall $a + n$ gerade.

4. Seien $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ unabhängige und identisch verteilte Variablen mit Verteilungsfunktion $F(x)$ und $\mathbb{E}[X_k^2] < \infty$. Wir nehmen an, dass $X_k \geq 0$.

a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty (1 - F(\sqrt{x}))\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \int_{\sqrt{x}}^\infty \mathrm{d}F(y)\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}[X_k^2]\,.$$

b) (8 Punkte) Zeigen Sie, dass das Ereignis $\{X_n > \sqrt{n}\}$ nur endlich oft auftritt.

5. Die Variablen $\{X_k : 1 \leq k \leq n\}$ seien unabhängig und identisch verteilt mit der Pareto-Verteilung $F_\alpha(x) = (1 - x^{-\alpha})\mathbb{1}_{x \geq 1}$ und $\alpha > 0$. Wir definieren die Variablen $Y_k = X_k$ für $k < n$ und $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

a) (6 Punkte) Bestimmen Sie die (gemeinsame) Dichte von $\{Y_1, \dots, Y_n\}$.

b) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass die Statistik $\mathcal{T} = \prod_{k=1}^n X_k$ suffizient ist.
Hinweis: Es genügt $(X_1, \dots, X_{n-1})$ (bzw. $(Y_1, \dots, Y_{n-1})$) gegeben $\mathcal{T}$ (bzw. Y_n) zu betrachten. Berechnen Sie das Integral für die Randdichte nicht explizit.

6. **a)** (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\eta - \lambda + \eta \log(\lambda/\eta) < 0$, falls $\eta \neq \lambda$ und $\eta, \lambda > 0$.

Sie denken, eine ganzzahlige Zufallsvariable sei Poisson verteilt mit Parameter λ. Ein Kommilitone behauptet, der Parameter sei $\eta \neq \lambda$. Sie haben Beobachtungen $N_1, N_2, \dots, N_n$.

b) (6 Punkte) Entwerfen Sie einen *optimalen* Test, um die Vermutung Ihres Kommilitonen zu widerlegen. Sie müssen die fehlende Konstante nicht explizit berechnen.

c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass unter der Hypothese die Teststatistik gegen Null und unter der Alternative nach Unendlich konvergiert.
Hinweis: Wohin konvergiert $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n N_k$?