Lösung der Klausur

1. **a)** X_2 ist genau dann Null, falls im zweiten Schritt nach Null gesprungen wird. X_2 kann nur Eins (Zwei) sein, wenn X_1 Null (Eins) ist. Also

$$\mathbb{P}[X_2 = 0] = 1 - p\;, \qquad \mathbb{P}[X_2 = 1] = (1-p)p\;, \qquad \mathbb{P}[X_2 = 2] = p^2\;.$$

b) Wir haben $\mathbb{P}[X_3 = 0] = 1 - p$. Nach der Bayschen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_2 = 0 \mid X_3 = 0] &= \frac{\mathbb{P}[X_3 = 0 \mid X_2 = 0]\mathbb{P}[X_2 = 0]}{1-p} = \frac{(1-p)(1-p)}{1-p} \\
&= 1 - p\;, \\
\mathbb{P}[X_2 = 1 \mid X_3 = 0] &= \frac{\mathbb{P}[X_3 = 0 \mid X_2 = 1]\mathbb{P}[X_2 = 1]}{1-p} = (1-p)p\;, \\
\mathbb{P}[X_2 = 2 \mid X_3 = 0] &= \frac{\mathbb{P}[X_3 = 0 \mid X_2 = 2]\mathbb{P}[X_2 = 2]}{1-p} = p^2\;.
\end{aligned}$$

c) Nein. Das Ereignis $\{X_2 = 0, X_3 = 3\}$ hat Wahrscheinlichkeit 0, aber $\mathbb{P}[X_2 = 0]\mathbb{P}[X_3 = 3] = (1-p)p^3 \neq 0$.

2. **a)** Im Falle f_{11} haben wir $X_1 = 1$ mit Wahrscheinlichkeit p. Ist $X_2 = 1$ (Wahrscheinlichkeit p), so ist $T_{11} = 2$. Ist $X_2 = 0$ (Wahrscheinlichkeit $1 - p$), so beginnen wir wieder von Vorne, müssen also im Schnitt zusätzlich zu den zwei erfolglosen Versuchen f_{11} warten. Ist $X_1 = 0$, so warten wir, zusätzlich zum ersten Schritt, im Mittel noch f_{11}. Im Falle f_{10} ist der Fall $X_1 = 0$ analog. Ist $X_1 = 1$, so erhalten wir die Sequenz 10, beim nächsten Auftritt von 0. Die mittlere Wartezeit $f_0 = \mathbb{E}[T_0]$ auf 0 ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[T_0 > k] = \sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p}\;.$$

Zusätzlich haben wir eins auf $X_1 = 1$ gewartet.

b) Aus der ersten Gleichung erhalten wir $f_{11} = (p+1)/p^2$, aus der zweiten Gleichung erhalten wir $f_{10} = 1/(p(1-p))$.

c) Für $p = \frac{1}{2}$ erhalten wir $f_{11} = 6$ und $f_{10} = 4$. Zuerst muss man auf eine 1 warten. Im zweiten Falle ist das Warten zu Ende, wenn danach das erste Mal eine Null erscheint. Im ersten Fall ist das Warten nur zu Ende, falls sofort eine 1 erscheint. Ansonsten muss man wieder von Vorne beginnen.

3. **a)** Wir haben $\{Z_n < a\} = \{S_n - \min_{0 \le k \le n} S_k < a\}$, und damit

$$\mathbb{P}[Z_n < a] = \mathbb{P}[\tilde{S}_n - \min_{0 \le k \le n} \tilde{S}_k < a] = \mathbb{P}[\max_{0 \le k \le n} S_{n-k} < a] = \mathbb{P}[T_a > n] \; .$$

b) Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z_n = a] &= \mathbb{P}[Z_n < a+1] - \mathbb{P}[Z_n < a] = \mathbb{P}[T_{a+1} > n] - \mathbb{P}[T_a > n] \\ &= \mathbb{P}[S_n \in [-a-1, a]] - \mathbb{P}[S_n \in [-a, a-1]] \\ &= \mathbb{P}[S_n \in \{-a-1, a\}] = \mathbb{P}[S_n \in [a, a+1]] \; .\end{aligned}$$

Ist $a + n$ gerade, erhalten wir

$$\mathbb{P}[Z_n = a] = \mathbb{P}[S_n = a] = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+a)} 2^{-n} \; .$$

4. **a)** Die erste Gleichung ist klar. Für die zweite verwenden wir den Satz von Fubini

$$\int_0^\infty \int_{\sqrt{x}}^\infty \mathrm{d}F(y)\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \int_0^{y^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}F(y) = \int_0^\infty y^2\, \mathrm{d}F(y) = \mathbb{E}[X_k^2] \; .$$

b) Es gilt, da $(1 - F(\sqrt{x}))$ eine fallende Funktion ist,

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}[X_n > \sqrt{n}] = \sum_{n=1}^\infty (1 - F(\sqrt{n})) \le \int_0^\infty (1 - F(\sqrt{x}))\, \mathrm{d}x = \mathbb{E}[X_k^2] < \infty \; .$$

Aus dem Borel–Cantelli-Lemma folgt nun die Aussage.

5. **a)** Die Dichtefunktion ist $f_\alpha(x) = \alpha x^{-\alpha-1} \mathbb{1}_{x \ge 1}$. Somit ist die gemeinsame Dichte $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \alpha^n (\prod_{k=1}^n x_k)^{-\alpha-1} \prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{x_k \ge 1}$. Die Umkehrfunktion wird $X_k = Y_k$ für $k < n$ und $X_n = Y_n / \prod_{k=1}^{n-1} Y_k$. Daher wird die Jacobi-Matrix

$$J(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\frac{y_n}{y_1 \prod_{k=1}^{n-1} y_k} & -\frac{y_n}{y_2 \prod_{k=1}^{n-1} y_k} & \cdots & -\frac{y_n}{y_{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} y_k} & \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} y_k} \end{pmatrix} .$$

Die Determinante ist $1/\prod_{k=1}^{n-1} y_k$. Somit wird die gemeinsame Dichte der $\{Y_k\}$

$$f_{Y,\alpha}(\boldsymbol{y}) = \frac{\alpha^n}{\prod_{k=1}^{n-1} y_k} y_n^{-\alpha-1} \mathbb{1}_{y_n \ge \prod_{k=1}^{n-1} y_k} \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{y_k \ge 1} \;.$$

b) Die bedingte Dichte von $(Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ gegeben Y_n ist

$$\frac{\alpha^n y_n^{-\alpha-1} \mathbb{1}_{y_n \ge \prod_{k=1}^{n-1} y_k} \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{y_k \ge 1}}{\prod_{k=1}^{n-1} y_k \int_1^{y_n} \int_1^{y_n/z_1} \cdots \int_1^{y_n/\prod_{k=1}^{n-2} z_k} \alpha^n y_n^{-\alpha-1} / \prod_{k=1}^{n-1} z_k \,\mathrm{d}z_{n-1} \ldots \,\mathrm{d}z_1}$$
$$= \frac{\mathbb{1}_{y_n \ge \prod_{k=1}^{n-1} y_k} \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{y_k \ge 1}}{\prod_{k=1}^{n-1} y_k \int_1^{y_n} \int_1^{y_n/z_1} \cdots \int_1^{y_n/\prod_{k=1}^{n-2} z_k} 1/\prod_{k=1}^{n-1} z_k \,\mathrm{d}z_{n-1} \ldots \,\mathrm{d}z_1} \;.$$

Dies hängt nicht von α ab. Somit ist $\mathcal{T}$ suffizient.

6. a) Leiten wir nach λ ab, erhalten wir $\eta/\lambda - 1$. Dies ist strikt positiv für $\lambda < \eta$ und strikt negativ für $\lambda > \eta$. Die Funktion ist Null für $\lambda = \eta$, strikt wachsend für $\lambda < \eta$ und strikt fallend für $\lambda > \eta$. Damit ist die Funktion strikt negativ für $\lambda \neq \eta$.

b) Der optimale Test ist der Likelihood-Quotienten-Test. Um den Kommilitonen zu widerlegen, muss die Hypothese $\theta_0 = \eta$ und die Alternative $\theta_1 = \lambda$ sein. Somit ist die Teststatistik

$$T = \frac{\prod_{k=1}^n \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^{N_k}/N_k!}{\prod_{k=1}^n \mathrm{e}^{-\eta} \eta^{N_k}/N_k!} = \mathrm{e}^{n(\eta-\lambda)} \Bigl(\frac{\lambda}{\eta}\Bigr)^{\sum_{k=1}^n N_k}$$
$$= \exp\Bigl\{ n(\eta - \lambda) + \sum_{k=1}^n N_k \log(\lambda/\eta) \Bigr\} \;.$$

Der gesuchte Test hat damit den kritischen Bereich $\{T \ge c\}$ für ein entsprechend gewähltes c.

c) Wir schreiben

$$T = \exp\Bigl\{ n\Bigl(\eta - \lambda + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_k \log(\lambda/\eta)\Bigr) \Bigr\} \;.$$

Nach dem Gesetz der grossen Zahl konvergiert $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n N_k$ nach η unter der Hypothese und unter der Alternative nach λ. Da unter der Hypothese im Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log T = \ell = \eta - \lambda + \eta \log(\lambda/\eta) < 0$, ist $\eta - \lambda + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n N_k \log(\lambda/\eta) < \frac{1}{2}\ell$ für n gross genug. Da $\exp\{n\frac{1}{2}\ell\}$ nach 0 konvergiert, konvergiert als die Teststatistik nach Null. Unter der Alternative können die Rollen von λ und η vertauscht werden. Dann konvergiert $1/T$ nach Null, also T nach Unendlich.